

Regelung eines radbasierten inversen Doppelpendels unter Betrachtung hybrider Dynamik

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt

zur

Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

M.Sc. Bruno Strah

aus Čakovec / Kroatien

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. S. Rinderknecht
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. U. Klingauf

Tag der Einreichung:	30.04.2012
Tag der mündlichen Prüfung:	03.07.2012

Darmstadt 2012

D17

Kurzfassung

Für Rollstuhlfahrer können Treppen zu einer deutlichen Minderung der Mobilität führen. Die Problematik des Treppensteigens mit einem radbasierten Gerät sowie die hierzu notwendige Methodik stehen im Fokus dieser Arbeit.

Das treppensteigende Gerät („Stair Climbing Device“ = SCD) wurde als ein elektrisch angetriebenes mechanisches System aufgebaut. Es kann als ein radbasiertes inverses Doppelpendel betrachtet werden. Der Winkel zwischen dem Ober- und Unterkörper ist verstellbar und die vier Räder (Vorder- und Hinterräder) sind am Unterkörper befestigt. Das SCD weist eine hohe Ähnlichkeit zum treppensteigenden Rollstuhl iBOT auf. Ein Unterschied zwischen beiden Geräten ist, dass das SCD beim Treppensteigen keine manuelle Unterstützung benötigt. Selbständiges Treppensteigen ist der entscheidende Vorteil der hier vorgestellten Methodik, weil weder Geländer immer zur Verfügung stehen noch sich Assistenten in der Nähe befinden. Überdies ist ein Treppensteigen mit unbemannten Fahrzeugen oder Robotern möglich.

Das SCD besitzt nichtlineare und abhängig von der Situation veränderliche zeitkontinuierliche Eigenschaften. Durch die einseitigen Rad-Boden-Bindungen weist es zudem diskontinuierliche Phänomene auf: Zustandsübergang zum Rad-Boden-Kontakt und Auflösen des Rad-Boden-Kontakts. Aufgrund der Wechselwirkung dieser beiden Phänomene, wird die Dynamik des Gesamtsystems als hybride Dynamik bezeichnet.

Ein hybrider Zustandsautomat stellt das Gesamtmodell des SCD dar. Es beinhaltet vier diskrete Zustände, von denen jeder mit einem zeitkontinuierlichen Modell beschrieben ist. Diese Modelle wurden nach Verwendung von Lagrangeschen Gleichungen 1. Art mit entsprechenden Bindungen (Zwangsbedingungen) bestimmt.

Die exakte Linearisierung wird als Basis der vorgestellten regelungstechnischen Methodik verwendet, um die nichtlineare Eigenschaft des SCD zu kompensieren.

Im diskreten Zustand „Bodenkontakt mit allen Rädern“ konnte die exakte Linearisierung mit vollem relativem Grad durchgeführt werden, was als Folge der gleichen Anzahl der Aktoren und Freiheitsgrade möglich war. Dies führt zu einem vollständig linearisierten und entkoppelten System.

Im diskreten Zustand „Bodenkontakt mit Hinterrädern“ handelt es sich um ein System mit nicht vollem relativem Grad, was zu einer partiellen exakten Linearisierung führt. Der Winkel des Unterkörpers ändert sich zusätzlich und erhöht somit die Anzahl der Freiheitsgrade um eins. Die bestehende Unteraktuiertheit folgt aus der kleineren Anzahl der Aktoren gegenüber Freiheitsgraden. Die exakte Linearisierung führt hier zum Aufteilen des Regelungssystems in eine linearisierte externe Dynamik und eine restliche nichtlineare interne Dynamik, welche die Bewegung des Unterkörpers beschreibt. Die Ruhelage des Systems wurde mit einer Analyse der Nulldynamik als instabil identifiziert, weshalb zum Stabilisieren eine zusätzliche Maßnahme notwendig ist.

Um die Zustandsübergänge „Absetzen“ und „Abheben“ zu realisieren, sind zunächst die Bedingungen ermittelt, welche die Zustandsübergänge ermöglichen.

Danach ist das „Absetzen“ im Rahmen des Konzeptes der virtuellen Bindung entworfen. Eine entsprechende Ausgangsfunktion des Regelungssystems, welche die Bewegung des Unter- und Oberkörpers koppelt, ist entworfen, sodass bestimmte Kriterien erfüllt werden. Zunächst wird die lokale Stabilität des „Absetzens“ mit der Analyse der Nulldynamik geprüft. Weiterhin wird ein sanfter Bodenkontakt erreicht, indem die Geschwindigkeit des Unterkörpers beim Erreichen des Bodenkontakts gemindert wird.

Das „Abheben“ wird einfacher mit einer entsprechenden Trajektorie des Oberkörpers ausgelöst. Das Verschwinden der Normalkraft zwischen den Rädern und dem Boden führt demnach zu dem Zustandsübergang.

Die Neigung des Unterkörpers kann im Gegensatz zu anderen Freiheitsgraden nicht gemessen werden, weshalb es mittels Sensordatenfusion eines Neigungssensors und Drehratensensors präzise ermittelt wird. Somit ist die Anwendung der vorgestellten regelungstechnischen Methoden möglich.

Die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Regelung wird sowohl am realen System als auch in der Simulation demonstriert. Zusätzlich ist das SCD Modell anhand des Vergleiches der Simulationen und Messungen des realen Systems bewertet.

Abstract

Stairs can considerably decrease mobility of wheelchair drivers. The stair-climbing issue with a wheeled device and the appropriate control methods are in the focus of this work.

The considered stair-climbing device (SCD) is an electrically driven mechanical system. The SCD is a wheeled double inverted pendulum. The angle between its upper and lower body is adjustable where the four wheels (front and rear) are connected to the lower body. The SCD has high similarity with the stair-climbing wheelchair iBOT. A difference between these devices is that the SCD may negotiate steps without manual support. Autonomy is the main advantage of the method presented here, because handrails do not exist everywhere nor is an assistant always nearby. Moreover, stair climbing with unmanned devices or robots is possible.

The SCD has nonlinear situation-changing continuous-time properties. Furthermore, discontinuous phenomena exist due to wheel-to-ground unilateral constraints: transition to contact and transition to detachment. Because of the interaction of both phenomena, hybrid nonlinear dynamics characterize the entire system.

The overall SCD model is represented by a hybrid automaton. It consists of four discrete states, where each of the discrete state is described with a continuous-time model. These models were derived using Lagrange equations of the 1st kind considering appropriate constraints.

Feedback linearization is used as a basis for the control design in order to linearize the nonlinear SCD system.

Full-state linearization is applied in the discrete state “all-wheel-to-ground contact” due to the full relative degree. This is a consequence of the equal number of actuators and the degrees of freedom (DOF). It leads to a completely linearized and decoupled system.

In the discrete state “rear-wheel-to-ground contact” the relative degree is not full, which is leading to a partial input-output linearization. In contrast to the discrete state “all-wheel-to-ground contact”, the SCD inclination is varying, increasing the DOF by one. The existing underactuation is a consequence of the smaller number of actuators compared to DOF. The feedback linearization now divides the control system into a linearized external dynamics and the remaining internal (still) nonlinear dynamics. The internal dynamics refer to the SCD inclination dynamics. The equilibrium point was qualified as unstable by analyzing the corresponding zero dynamics. Therefore, an additional control action is needed in order to stabilize the system in the equilibrium point.

To realize discrete state transitions “settling” (transition to contact) and “liftoff” (transition to detachment), conditions allowing the state transitions are determined first.

The “settling” is then developed within the virtual constraints framework. A certain control system output function coupling the motion of the lower and the upper body is determined to fulfill specific criteria. Firstly, local stability of the “settling” motion was proved by analyzing the zero dynamics. Secondly, the ground is smoothly reached due to decreasing lower body velocity at wheel-to-ground contact.

The “liftoff” is initiated simpler by a specific motion trajectory of the upper body. Thus the disappearing normal wheel-to-ground force leads to the discrete state transition.

Since the lower body inclination cannot be measured directly like other DOF, it is accurately determined by means of data fusion of an inclinometer and a gyroscope. Hence, the presented control methods can be applied.

The control performance is demonstrated on the real system as well as in simulation. Additionally, the SCD model quality is evaluated based on comparison of the simulations and the real system measurements.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechatronische Systeme im Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt entstanden.

Die anfangs ersichtliche grobe Idee und die Tatsache des bereits bekannten *iBOTs* führten mich bei der Verwirklichung durch die vielseitigen und detailreichen Gebiete der Dynamik mechanischer Systeme und der Regelungstechnik. Um das Ziel, das selbständige Treppensteigen eines radbasierten Gerätes zu erreichen, musste ich mich bei der Wahl stets zwischen der notwendigen Übersicht und Detailtiefe für einen zielführenden Kompromiss entscheiden.

Mein herzlicher Dank gilt an erster Stelle Herrn Professor Rinderknecht für die aktive Unterstützung, unerschöpfliches Interesse und die Förderung der Arbeit. Dies brachte mir die notwendige Klarheit und Motivation, die entstandenen Herausforderungen zu meistern. Ebenfalls bedanke ich mich für die problemlose Übernahme des Themas nach dem Wechsel der Institutsleitung, den offen gelassenen Freiraum und das Vertrauen beim Erstellen dieser Arbeit.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn Professor Klingauf für die Übernahme des Koreferats und die ernüchternden Hinweise in den regelungstechnischen Themen. Jene ermutigten mich, die Probleme sinnvoll zu priorisieren.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Nordmann für die Annahme des Themas und das aufgebrachte Vertrauen. Ich bin sehr erfreut, die Zeit am Institut während seiner Anwesenheit genossen zu haben.

Der Vereinigung „Freunde der TU Darmstadt“ danke ich für die finanzielle Unterstützung beim Aufbau des Demonstrators.

Den Kollegen des Instituts danke ich für die wertvolle Unterstützung während der Entstehung der Arbeit. Im Besonderen gilt mein Dank: Martin Ernst für inspirierende Gespräche, aufgrund derer sich die Entscheidung bekräftigte, das vorhandene Thema zu untersuchen; Rafael Fietzek, Robert Köhler, Daniel König, Zhentao Wang und vor allem Bernd Riemann für wertvolle Ratschläge und das Korrekturlesen der Arbeit; Simon Kern für die Unterstützung bei ersten Schritten am Institut; Kai Adler, Francis Fomi, Eric Ngondi, Christian Kaletsch und Daniel Peters für die fachlichen Diskussionen und Gespräche am Rande des Fachlichen; Torsten Felzer für die geistreiche Inspiration bei der Arbeit und darüber hinaus; und Peter Kytka für die treue Schwimmpartnerschaft bei allen Wetterlagen.

Den Mitarbeitern aus der Werkstatt, Herrn Walter Rausch und Herrn Uwe Rodenhäuser danke ich für die problemlose und mitwirkende Verwirklichung des Demonstrators. Ein besonderer Dank gilt Ursula Willner für Ihre Freundlichkeit, Eigeninitiative und prompte Erledigung aller administrativen Belange.

Die Studenten, welche ich betreuen durfte, haben im Rahmen ihrer Studien- bzw. Bachelorarbeiten wesentliche Beiträge zu dieser Arbeit geleistet. Für die Inbetriebnahme des radbasierten inversen Pendels, welches als Vorgänger des radbasierten inversen Doppelpendels zur Untersuchung einiger wichtiger Themen diente, danke ich Arne Wahrburg und für die Weiterentwicklung des gleichen Jochen Hohm. Für die Beiträge zum radbasierten inversen Doppelpendel danke ich Pier-

rette Neudjou, David Schmidt-Riese Nunes und Ruben König. Bei den Hilfswissenschaftlern Robert Rauch und Chris Zöller bedanke ich mich für die Unterstützung bei der Konzeptfindung zur Konstruktion und weiteren Themen bezüglich beider Pendel.

Frau Magdalena Elger und Frau Maria Haase danke ich herzlich für Ihre Hilfe und flexible Bereitschaft bei der Deutschkorrektur.

Darmstadt, Juli 2012

Bruno Strah

Inhalt

Symbole und Abkürzungen	v
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Technik	2
1.2 Ziele	6
1.3 Fazit	7
2 Grundlagen	9
2.1 Mechanische Systeme mit zeitkontinuierlicher Dynamik	10
2.1.1 Kinematik	11
2.1.2 Kinetik	16
2.2 Mechanische Systeme mit diskontinuierlicher Dynamik	20
2.2.1 Kontakt	21
2.2.2 Stoß	22
2.3 Mechanische Systeme mit hybrider Dynamik	24
2.4 Exakte Linearisierung	27
2.4.1 Linearisierung im Fall des vollen relativen Grades	30
2.4.2 Linearisierung im Fall des nicht vollen relativen Grades	32
2.4.3 Führungsverhalten	35
2.4.4 Konzept der virtuellen Bindungen	36
2.5 Erzeugen einer Solltrajektorie	37
2.6 Fazit	40
3 Reales System	41
3.1 Funktionsprinzip	42
3.2 Konstruktion	44
3.3 Aktorik	45
3.4 Sensorik	46
3.5 Reglerplattform	47
3.6 Fazit	48
4 Modellbildung	49
4.1 Zeitkontinuierliche Dynamik	50
4.1.1 Geometrie	50
4.1.2 Kinematik	54
4.1.3 Bindungen	54
4.1.4 Kinetik	60
4.2 Diskontinuierliche Dynamik	71
4.2.1 Stoß und Kontaktaufnahme	72

4.2.2	Abheben	74
4.3	Hybride Dynamik	75
4.3.1	Aufbau der Simulation	77
4.4	Analyse	81
4.5	Fazit	81
5	Regelung	83
5.1	Ermittlung des Neigungswinkels	86
5.1.1	Problembeschreibung	86
5.1.2	Modellbildung des Neigungssensors	87
5.1.3	Beobachterentwurf	90
5.2	Modelle für den Reglerentwurf	94
5.3	Exakte Linearisierung	94
5.4	Regelung im Zustand S_3	97
5.5	Regelung im Zustand S_1	103
5.5.1	Nulldynamik	105
5.5.2	Stabilisierung	108
5.6	Zustandsübergänge	112
5.6.1	Strategien für die Zustandsübergänge	117
5.7	Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$	119
5.7.1	Bestimmung der Bindungsfunktion	121
5.7.2	Nulldynamik	123
5.7.3	Abbremsung	127
5.8	Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$	129
5.9	Gesamtsystem	131
5.9.1	Problematik realistischer Zustandsübergänge	133
5.9.2	Stabilität des Gesamtsystems	134
5.10	Positionsregelung	135
5.11	Fazit	137
6	Ergebnisse und Anwendung zum Treppensteigen	139
6.1	Ebener Boden	140
6.1.1	Regelung im Zustand S_3	140
6.1.2	Regelung im Zustand S_1	142
6.1.3	Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$	144
6.1.4	Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$	147
6.2	Treppe	149
6.2.1	Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ auf der Treppe	150
6.2.2	Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ auf der Treppe	152
6.3	Fazit	154

7	Zusammenfassung und Ausblick	157
8	Literaturverzeichnis	161
A	Anhang: Technische Daten	167
A.1	Konstruktion.....	167
A.2	Aktorik	168
A.3	Sensorik	172
A.4	Hardware und Software zur Regelung/Steuerung.....	173
A.5	Sonstige Elemente	174
B	Anhang: Grundlagen und Modellbildung	175
B.1	Integrierbarkeit der Bindungen.....	175
B.2	Beispiel: <i>Rad am Boden</i>	175
B.2.1	Fall mit holonomen Bindungen: <i>Rad am Boden in einer Ebene</i>	175
B.2.2	Fall mit nichtholonomen Bindungen: <i>Rad am Boden im 2D-Raum</i>	177
B.3	Beispiel: <i>Springender Ball</i>	179
B.4	Beispiel: <i>Stab mit Doppelkontakt</i>	181
B.5	Geometrie.....	182
B.6	Kinematik.....	183
B.7	Modell der Dynamik	183
B.8	Modellparameter	187
B.9	Simulation des hybriden Modells.....	188
B.10	Simulationsbeispiel des nicht geregelten SCD	190
C	Anhang: Regelung	193
C.1	Ermittlung des Neigungswinkels	193
C.2	Mathematische Notation.....	195
C.3	Modell im Zustandsraum	197
C.4	Exakte Linearisierung im Allgemeinen	199
C.4.1	Triviale Bindung	201
C.5	Lokale Linearisierung im S_1	204
C.5.1	Gain Scheduling.....	205
C.5.2	LQ Regelung.	207
C.5.3	Daten zur Stabilisierung mittels Zustandsregler	208
C.6	Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$	210
C.6.1	<i>Bézier</i> -Polynom	210
C.6.2	Nulldynamik.....	211
D	Anhang: Ergebnisse und Anwendung zum Treppensteigen.....	215
D.1	Regelung in S_3 , ebener Boden.....	216
D.2	Regelung in S_1 , ebener Boden.....	218
D.3	Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, ebener Boden	220

D.4	Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, ebener Boden.....	224
D.5	Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe	226
D.6	Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe	228

Symbole und Abkürzungen

Zeichen, Latein

${}^i\mathbf{T}_j$	Transformationsmatrix der homogenen Transformationen (transformiert die Koordinaten des Koordinatensystems K_j zu den Koordinaten des Koordinatensystems K_i)
${}^i\mathbf{r}_b$	Ortsvektor zum Mittelpunkt der Radantriebsachse der Hinterräder, $i \in \{a, b\}$
${}^i\mathbf{r}_c$	Ortsvektor zum Mittelpunkt der Oberkörperantriebsachse, $i \in \{a, b, c\}$
${}^i\mathbf{r}_d$	Ortsvektor zum Mittelpunkt der Radachse der Vorderräder, $i \in \{a, b, c, d\}$
${}^i\mathbf{r}_e$	Ortsvektor zum geometrischen Mittelpunkt des SCD-Oberkörpers, $i \in \{a, b, c, d, e\}$
${}^i\mathbf{r}_{j,b}$	Ortsvektor zum Mittelpunkt des linken und rechten Rades der Hinterräder, $i \in \{a, b\}, j \in \{l, r\}$
${}^i\mathbf{r}_{j,d}$	Ortsvektor zum Mittelpunkt des linken und rechten Rades der Vorderräder, $i \in \{a, b, c, d\}, j \in \{l, r\}$
ix_j	Koordinate des kartesischen Koordinatensystems (für Indizes siehe Erklärung in der Liste Symbole) in m
iy_j	Koordinate des kartesischen Koordinatensystems (für Indizes siehe Erklärung in der Liste Symbole) in m
iz_j	Koordinate des kartesischen Koordinatensystems (für Indizes siehe Erklärung in der Liste Symbole) in m
\mathcal{I}_{A,S_i}	Logische Funktion als Bedingung für einen Stoß (A für Anfang, \mathcal{I} für <i>Impuls</i>) in dem Zustand S_i
\mathcal{I}_{E,S_i}	Logische Funktion als Bedingung für einen Abprall nach dem Stoß (E für Ende, \mathcal{I} für <i>Impuls</i>) in dem Zustand S_i
$\mathcal{R}_{k \rightarrow i}$	<i>Reset</i> -Funktion, die beim Übergang zweier diskreter Zustände $S_k \rightarrow S_i$ die Variable des kontinuierlichen Zustandsvektors neu bestimmt
\mathbf{A}_{fl}	Systemmatrix der externen Dynamik nach der exakten Linearisierung
\mathbf{B}_c	Matrix der <i>Coulombschen</i> Reibung der Antriebseinheiten
\mathbf{B}_{fl}	Eingangsmatrix der externen Dynamik nach der exakten Linearisierung
\mathbf{B}_v	Matrix der viskosen Reibung der Antriebseinheiten
\mathbf{C}_q	Geschwindigkeitsabhängige Matrix (<i>Coriolis</i> - und Zentrifugalkomponenten) in abhängigen Koordinaten \mathbf{q}
\mathbf{C}_{qm}	Geschwindigkeitsabhängige Matrix (<i>Coriolis</i> - und Zentrifugalkomponenten) in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} inklusive Antriebsreibung
\mathbf{C}_{fl}	Ausgangsmatrix der externen Dynamik nach der exakten Linearisierung
\mathbf{C}_{v,S_i}	Geschwindigkeitsabhängige und positionsabhängige Matrix (<i>Coriolis</i> -, Zentrifugal- und Gravitationskomponenten) in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} , beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{1, 3\}$

\mathbf{E}_q	Verteilungsmatrix der Momente in dem System der abhängigen Koordinaten \mathbf{q}
\mathbf{E}_{v,S_i}	Verteilungsmatrix der Momente in dem System der unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} , beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{1,3\}$
$\mathbf{F}_{st,1}$	Statischer Vorfilter für die Stabilisierung im S_1
$\mathbf{F}_{st,2}$	Statischer Geschwindigkeitsvorfilter für die Stabilisierung im S_1
\mathbf{G}_q	Gravitationsmatrix in abhängigen Koordinaten \mathbf{q}
\mathbf{H}_q	Trägheitsmatrix in abhängigen Koordinaten \mathbf{q}
\mathbf{H}_{qm}	Trägheitsmatrix in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} inklusive Antriebsträgheiten
\mathbf{H}_{v,S_i}	Trägheitsmatrix in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} , beim vorhandenen Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{1,3\}$
$\mathbf{J}_{cm,i}$	Trägheitsmatrix des i -ten Körpers um das eigene Massenzentrum, Unterkörper des SCD: $i = c$, Oberkörper des SCD: $i = e$
\mathbf{J}_m	Matrix der Motorträgheitsmomente
\mathbf{J}_{v,S_i}	Jacobi-Matrix, Transformation der unabhängigen in die abhängigen Koordinaten, beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
\mathbf{K}_{S_i}	Verstärkungsmatrix des Zustandsreglers
\mathbf{K}_e	Matrix der Spannungskonstanten der DC-Motoren
\mathbf{K}_{lin}	Matrix des linearen Reglers der externen Dynamik
\mathbf{K}_m	Matrix der Momentkonstanten der DC-Motoren
\mathbf{L}_a	Matrix der Induktivität der DC-Motoren
\mathbf{M}_e	Vektor der elektrischen Momente der DC-Motoren
\mathbf{Q}_c	Vektor der Bindungs- Kräfte/Momente
\mathbf{Q}_{ext}	Vektor der externen (äußeren) Kräfte/Momente
\mathbf{Q}_{long}	Gewichtungsmatrix des Zustandsvektors im Gütefunktional beim LQ-Problem für Ermittlung des linearen Reglers für die longitudinale Richtung
\mathbf{R}_{A,S_i}	Matrix, Komponente der exakten Linearisierung
\mathbf{R}_a	Matrix der Widerstände der DC-Motoren
\mathbf{R}_{b,S_i}	Vektor, Komponente der exakten Linearisierung
$\mathbf{R}_i(j)$	Rotationsmatrix um die i -Achse um den Winkel j
\mathbf{R}_{long}	Gewichtungsmatrix des Eingangsvektors im Gütefunktional beim LQ-Problem für Ermittlung des linearen Reglers für die longitudinale Richtung
$\mathbf{T}_{q2\alpha}$	Transformationsmatrix der abhängigen Koordinaten zu Antriebskoordinaten
\mathbf{T}_{stab}	Übertragungsfunktion des durch die stabilisierende Rückführung behandelten Systems in S_1
\mathbf{T}_τ	Transformationsmatrix von den zusammengesetzten Strömen zu den antriebsbezogenen Strömen

\mathbf{e}_η	Differenztrajektorie (Variierte Trajektorie gegenüber nominaler Trajektorie) beim Nulldynamikverlauf
\mathbf{f}_{fl}	Systemfunktion der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung nach Anwendung der exakten Linearisierung
\mathbf{g}_{N,S_i}	Vektor der Distanzen zu den Kontaktpunkten, beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
\mathbf{g}_N	Vektor der Distanzen zwischen zweier Körper (oder Körper und Umgebung)
\mathbf{g}_{fl}	Eingangsfunktion der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung nach Anwendung der exakten Linearisierung
\mathbf{i}_G	Matrix der Getriebeuntersetzungen
\mathbf{i}_a	Vektor der Ströme der DC-Motoren
\mathbf{i}_v	Vektor der Stellgrößen (zusammengesetzte Sollströme) des Reglers
\mathbf{r}_{S_i}	Vektor, $\mathbf{r}_{S_i} = \mathbf{R}_{A,S_i}^{-1} \mathbf{R}_{b,S_i}$, Rückführungsglied der exakten Linearisierung
\mathbf{r}_1	Ortsvektor zum Drehpunkt des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers)
\mathbf{r}_2	Ortsvektor zur Punktmasse des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers)
\mathbf{u}_a	Vektor der Spannungen der DC-Motoren
\mathbf{v}_{S_i}	Matrix, $\mathbf{v}_{S_i} = \mathbf{R}_{A,S_i}^{-1}$, Vorsteuerungsglied der exakten Linearisierung
$B_{c,bd}$	<i>Coulombsche</i> (trockene) Reibung des Oberkörperantriebes in Nm
$B_{c,wh}$	<i>Coulombsche</i> (trockene) Reibung des Radantriebes in Nm
$B_{v,bd}$	Viskose Reibung des Oberkörperantriebes in Nms/rad
$B_{v,wh}$	Viskose Reibung des Radantriebes in Nms/rad
B_w	Halbe Spurweite des SCD in m
D_{st}	Auftrittsbreite der Stufe in m
H_h	Teilübertragungsfunktion des Inklinometermodells ($\phi_h \rightarrow \phi_{inkl}$)
H_i	Abstand zwischen dem Drehpunkt des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers) und dem Drehpunkt des Oberkörpers des SCD in m
H_l	Teilübertragungsfunktion des Inklinometermodells ($l \rightarrow \phi_{inkl}$)
H_l^*	Modifizierte Teilübertragungsfunktion des Inklinometermodells ($l \rightarrow \phi_{inkl}$)
H_ρ	Teilübertragungsfunktion des Inklinometermodells ($\rho \rightarrow \phi_{inkl}$)
I_{max}	Maximaler Strom des DC-Motors in A
$J_{S_1 \rightarrow S_3}$	Gütefunktional für das Optimieren des Zustandsübergangs $S_1 \rightarrow S_3$
$J_{B,i}$	Trägheitsmoment des Oberkörpers um die $^e i$ -Achse, $i \in \{x, y, z\}$ in kgm^2
J_i	Trägheitsmoment des Unterkörpers um die $^c i$ -Achse, $i \in \{x, y, z\}$ in kgm^2
$K_{I,pc}$	Integalfaktor des Reglers bei der zusätzlichen Positionsregelung
$K_{I,sf}$	Integalfaktor, Rückführungsglied des Beobachters L_O
$K_{P,pc}$	Proportionalfaktor des Reglers bei der zusätzlichen Positionsregelung
$K_{P,sf}$	Proportionalfaktor, Rückführungsglied des Beobachters L_O

K_a	Absolutes, raumfestes Koordinatensystem
K_b	Beim SCD: Koordinatensystem des Unterkörpers am Mittelpunkt der angetriebenen Räderdrehachse (Hinterräder)
K_c	Koordinatensystem des Unterkörpers am Mittelpunkt der Oberkörperdrehachse des SCD
K_d	Koordinatensystem des Unterkörpers am Mittelpunkt der freien Räderdrehachse (Vorderräder) des SCD
K_e	<ul style="list-style-type: none"> Koordinatensystem des Oberkörpers des SCD im geometrischen Mittelpunkt Spannungskonstante des DC-Motors
$K_{ff,pc}$	Proportionalfaktor der Vorsteuerung bei der zusätzlichen Positionsregelung
K_m	Drehmomentkonstante des DC-Motors in Nm/A
L_O	Rückführungsglied des Beobachters (Sensordatenfusion)
L_a	Induktivität des Ankers des DC-Motors in H
L_p	Abstand zwischen der Punktmasse und dem Drehpunkt des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers) in m
M_B	Masse des Oberkörpers des SCD in kg
M_{body}	Mechanisches Moment der Oberkörperantriebe, zusammengefasst links und rechts in Nm
$M_{e,j,b}$	Elektrisches Moment der Radantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in Nm
$M_{e,j,body}$	Elektrisches Moment der Oberkörperantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in Nm
$M_{j,b}$	Mechanisches Moment der Radantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in Nm
P_{pc}	Strecke des SCD behandelt mit exakter Linearisierung und Stabilisierung
R_a	Ohmscher Widerstand des DC-Motors in Ω
R_{pc}	Regler der zusätzlichen Positionsregelung
S_0	Diskreter Zustand, beim SCD: SCD im freien Fall
S_1	Diskreter Zustand, beim SCD: SCD mit der hinteren Radachse im Kontakt mit dem Boden
S_2	Diskreter Zustand, beim SCD: SCD mit der Vorderradachse im Kontakt mit dem Boden
S_3	Diskreter Zustand, beim SCD: SCD mit beiden Radachsen im Kontakt mit dem Boden
$S_{c,i}$	Diskreten Zustände des Regelalgorithmus
S_{sys}	Zustände des Zustandsautomaten der Steuerung/Regelung
T_{pc}	Führungsübertragungsfunktion der Positionsregelung
T_{rot}	Kinetische Energie der Rotationsgeschwindigkeiten in J
T_{samp}	Abtastzeit des realen Systems, eingestellt im dSPACE System in s
T_{tran}	Kinetische Energie der Translationsgeschwindigkeiten in J
V_{pc}	Vorsteuerung der zusätzlichen Positionsregelung

b_3	Koeffizient der Teilübertragungsfunktion des Inklinometermodells H_h
b_4	Koeffizient der Teilübertragungsfunktion des Inklinometermodells H_p
b_p	Parameter der viskosen Reibung des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers) in Nms/rad
c_k	Koeffizienten des <i>Bézier</i> -Polynoms
$d_{0,q}$	Dämpfungsgrad des q -ten Kanals der linearisierten Dynamik
d_{fp,S_i}	Freiheitsgrad der Lage, beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
d_{fv,S_i}	Freiheitsgrad der Geschwindigkeit, beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
d_p	Dämpfungsgrad des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers)
e_{pc}	Regelabweichung der zusätzlichen Positionsregelung in m
$f_{1 \rightarrow 3}$	Virtuelle Bindungsfunktion beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$
f_{bal}	Ruhelagekennlinie des SCD im Zustand S_1
f_η	Funktionen der Nulldynamik beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$
$g_{N,1}$	Distanz zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD ($^b x$ -Achse in der Abb. 4.2) in m
$g_{N,2}$	Distanz zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD ($^b y$ -Achse in der Abb. 4.2) in m
$g_{N,3}$	Distanz zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD, Senkrechte Bewegungsrichtung ($^b z$ -Achse in der Abb. 4.2) in m
$g_{N,4}$	Distanz zum Kontaktpunkt d („vorne“) des SCD, Senkrechte Bewegungsrichtung ($^d z$ -Achse in der Abb. 4.2) in m
$i_{G,bd}$	Getriebeuntersetzung der Oberkörperantriebe
$i_{G,wh}$	Getriebeuntersetzung der Radantriebe
$i_{j,b}$	Strom der Radantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in A
$i_{j,body}$	Strom der Oberkörperantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in A
i_{long}	Zusammengesetzter Strom zur Bildung des Antriebsmoments in die longitudinale Bewegungsrichtung des SCD in A
$i_{s,j,b}$	Sollstrom der Radantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in A
$i_{s,j,body}$	Sollstrom der Oberkörperantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in A
i_{yaw}	Zusammengesetzter Strom zur Bildung des Antriebsmoments in die Drehrichtung (θ) des SCD in A
$k_{D,q}$	Derivationsfaktor des linearen Reglers (q -ter Kanal) der externen Dynamik
$k_{P,q}$	Proportionalfaktor des linearen Reglers (q -ter Kanal) der externen Dynamik
l_1	Longitudinale Bewegungsrichtung, Komponente des Ortsvektors \mathbf{r}_1 in m
l_d	Angeforderte Sollposition des SCD (<i>demand</i>) in m
m_{hol,S_i}	Anzahl der holonomen Bindungen, beim vorhandenen Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
m_i	Masse des i -ten Körper in kg

m_{nhol,S_i}	Anzahl der nichtholonomen Bindungen, beim vorhandenen Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
m_p	Punktmasse des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers) in kg
$m_{w,b}$	Masse des Hinterrades inkl. Antrieb in kg
$m_{w,d}$	Masse des Vorderrades in kg
m_v	Anzahl der Eingänge des Systems
n_c	Anzahl der Kontaktmöglichkeiten (Kontaktpunkte)
n_v	Systemordnung des Systems
p_v	Anzahl der Ausgänge des Systems
t_A	Zeitpunkt bei Anfang des diskreten Ereignisses in s
t_E	Zeitpunkt bei Ende des diskreten Ereignisses in s
t_{TD}	Zeitpunkt des Bodenkontakts (<i>touchdown</i>) in s
$u_{j,b}$	Spannung der Radantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in V
$u_{j,body}$	Spannung der Oberkörperantriebe links und rechts $j \in \{l, r\}$ in V
v_{body}	Komponente des neuen Eingangs bei der Anwendung der exakten Linearisierung
v_{lat}	Geschwindigkeit in der lateralen Bewegungsrichtung in m/s
v_{long}	<ul style="list-style-type: none"> • Geschwindigkeit in der longitudinalen Bewegungsrichtung in m/s • Komponente des neuen Eingangs bei der Anwendung der exakten Linearisierung
v_{yaw}	Komponente des neuen Eingangs bei der Anwendung der exakten Linearisierung
z_1	Höhe, Komponente des Ortsvektors \mathbf{r}_1 in m
\mathcal{C}_{A,S_i}	Logische Funktion als Bedingung für den Anfang (<i>A</i> für Anfang) eines Kontakts (<i>C</i> für <i>contact</i>) in dem Zustand S_i
\mathcal{C}_{E,S_i}	Logische Funktion als Bedingung für das Aufheben (<i>E</i> für <i>end</i>) eines Kontakts (<i>C</i> für <i>contact</i>) in dem Zustand S_i
$\mathcal{G}_{k \rightarrow i}$	<i>Guard</i> -Funktion (logische Funktion), die den Übergang zweier diskreter Zustände ermöglicht $S_k \rightarrow S_i$
dc_a S3	Abbremsen des Oberkörpers am Boden (S_3) aktiv
fl_a S1	Absetzen (Fallen in S_1) aktiv
\mathcal{H}	Hybrider Zustand, bestehend aus dem diskreten Zustand und den kontinuierlichen Zustandsvektor
n.o. S1	Normaloperation in S_1 aktiv
n.o. S3	Normaloperation in S_3 aktiv
rh_a S1	Änderung der Sollgröße ρ_s in S_1 aktiv
rh_a S3	Änderung der Sollgröße ρ_s in S_3 aktiv
A	Systemmatrix bei Zustandsraumdarstellung eines linearen Systems
B	Eingangsmatrix bei Zustandsraumdarstellung eines linearen Systems

C	Ausgangsmatrix bei Zustandsraumdarstellung eines linearen Systems
D	Durchgangsmatrix bei Zustandsraumdarstellung eines linearen Systems
E	Einheitsmatrix (ohne Index)
R	Rotationsmatrix, allgemein
e	Regelabweichung
f	Systemfunktion der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung
g	Eingangsfunktion der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung
h	Ausgangsfunktion der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung
q	Vektor der abhängigen Koordinaten
t	Teilkomponente (Funktion) der internen Dynamik
v	Neuer Eingang bei der Anwendung der exakten Linearisierung
w	Teilkomponente (Funktion) der internen Dynamik
x	Zustandsvektor
y	Ausgangsvektor
z	Neuer Zustandsvektor nach der Transformation durch Ψ bei der exakten Linearisierung
<i>H</i>	Abstand der Oberkörperdrehachse bis zum geometrischen Mittelpunkt des SCD-Oberkörpers in m
<i>L</i>	Halber Radstand des SCD in m
<i>M</i>	Masse des Unterkörpers des SCD in kg
<i>P</i>	Beliebiger Punkt an einem Körper
<i>R</i>	Radradius in m
<i>T</i>	Kinetische Energie in J
<i>V</i>	Potentielle Energie in J
<i>W</i>	Die errichtete Arbeit an das System in W
<i>g</i>	Gravitationsbeschleunigung der Erde in m/s^2
<i>i</i>	Ohne Index die übliche Hilfsvariable (Index), ansonsten auch Strom und Untersetzungsfaktor
<i>j</i>	Die übliche Hilfsvariable (Index)
<i>k</i>	Die übliche Hilfsvariable (Index)
<i>l</i>	Weg in der longitudinalen Bewegungsrichtung in m
<i>m</i>	Anzahl der Bindungen (holonom + nichtholonom)
<i>n</i>	Anzahl der abhängigen Koordinaten im dynamischen System
<i>p</i>	<ul style="list-style-type: none">• Anzahl der Antriebsmomente• Die übliche Hilfsvariable (Index)
<i>q</i>	Die übliche Hilfsvariable (Index)

r	<ul style="list-style-type: none"> • Relativer Grad eines Systems (Allgemein) • Relativer Grad des MIMO Systems (des SCD)
$reset$	Logisches Signal welches das Rücksetzen der Variablen der zeitkontinuierlichen Dynamik auslöst
s	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Laplace</i>-Variable • Pole einer Übertragungsfunktion
t	Zeit in s
w	Wichtungsfaktoren beim Gütefunktional für das Optimieren des Zustandsübergangs $S_1 \rightarrow S_3$

Häufige Indizes

S_i	Der Index bezieht die Größe auf den diskreten Zustand S_i , $i \in \{0,1,2,3\}$
A	<ul style="list-style-type: none"> • Bei den Variablen der diskontinuierlichen Dynamik deutet ein zusätzlicher Index A zum Anfang eines Stoßes • Anfangszeit
E	<ul style="list-style-type: none"> • Bei den Variablen der diskontinuierlichen Dynamik deutet ein zusätzlicher Index E zum Ende eines Stoßes • Endzeit
Z	<i>Zero dynamics value</i> , Wert der Nulldynamik
m	Messung
s	Der Index s (klein geschrieben) deutet auf eine Sollgröße hin
s, A	Anfangswert einer Sollgröße
s, E	Endwert einer Sollgröße
0	Index 0 bezeichnet den Wert einer Ruhelage
$1 \rightarrow 3$	Bezeichnet die Variable im Zustand S_1 während des Verlaufs zum Zustand S_3

Zeichen, Griechisch

\mathbf{v}_{S_i}	Vektor der unabhängigen Koordinaten, beim vorhandenen Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
${}^j\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$	Drehgeschwindigkeitsmatrix des i -ten Körper im j -ten Koordinatensystem
${}^j\boldsymbol{\omega}_i$	Drehgeschwindigkeitsvektor des i -ten Körper im j -ten Koordinatensystem
${}^j\omega_{i,k}$	Drehgeschwindigkeit um die Koordinate k des i -ten Körper im j -ten Koordinatensystem in rad/s
$\dot{\rho}_{TD}$	Oberkörperwinkelgeschwindigkeit beim Aufsetzen des SCD in rad/s
$\hat{\phi}_h$	Gehäusewinkel des Inklinometers gegenüber den Gravitationslinien (Schätzwert des Beobachters) in rad
$\dot{\phi}_{TD}$	Unterkörperwinkelgeschwindigkeit beim Aufsetzen des SCD in rad/s

$\dot{\phi}_{gyro}$	Ausgang des Drehratensensors in rad/s
$\hat{\phi}_{inkl}$	Winkel des Inklinometers (Schätzwert des Beobachters) in rad
$\dot{\phi}_{off}$	Offset des Drehratensensors in rad/s
$\Lambda_{N,1}$	Kraftstoß zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD (${}^b x$ -Achse in der Abb. 4.2) in Ns
$\Lambda_{N,2}$	Kraftstoß zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD (${}^b y$ -Achse in der Abb. 4.2) in Ns
$\Lambda_{N,3}$	Kraftstoß zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD, Senkrechte Bewegungsrichtung (${}^b z$ -Achse in der Abb. 4.2) in Ns
$\Lambda_{N,4}$	Kraftstoß zum Kontaktpunkt d („vorne“) des SCD, Senkrechte Bewegungsrichtung (${}^d z$ -Achse in der Abb. 4.2) in Ns
$\Omega_{i,b}$	Winkel des linken und rechten Radantriebs gegenüber der Umgebung (${}^b z$ -Achse in der Abb. 4.2) in rad
Δ_{A,S_i}	Vektor, Kurze Form des Geschwindigkeitsbeitrages durch einen Stoß
Λ_{N,S_i}	Matrix der Kraftstöße, beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
\mathbf{E}_S	Sollwertvektor bestehend aus Beschleunigungswerten
$\Phi_{\mathbf{q},S_i}$	Jacobi-Matrix der Vektorfunktion $\Phi_{\mathbf{q}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}}$, beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
λ_{S_i}	Lagrangescher Multiplikator, beim vorhandenem Index S_i bezogen auf den diskreten Zustand des SCD, $i \in \{0,1,2,3\}$
$\boldsymbol{\omega}_m$	Vektor der Motordrehgeschwindigkeiten
$\boldsymbol{\epsilon}_N$	Matrix der Stoßzahlen
Φ_i	Funktion der i -ten Bindung
$\alpha_{i,b}$	Winkel des linken und rechten Radantriebs (Sensorgröße) gegenüber dem Unterkörper, $i \in \{l,r\}$ in rad
δ_{st}	Stufenhöhe in m
$\varepsilon_{\dot{g}}$	Geschwindigkeitsschwelle zur Unterbrechung des <i>Zeno</i> -Verhaltens in m/s
ε_{IC}	Kleiner Positionswert als Korrektur beim Rücksetzen der Positionen bei Kontaktaufnahme in m
$\lambda_{N,1}$	Bindungskraft zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD (${}^b x$ -Achse in der Abb. 4.2) in N
$\lambda_{N,2}$	Bindungskraft zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD (${}^b y$ -Achse in der Abb. 4.2) in N
$\lambda_{N,3}$	Bindungskraft zum Kontaktpunkt b („hinten“) des SCD, Senkrechte Bewegungsrichtung (${}^b z$ -Achse in der Abb. 4.2) in N
$\lambda_{N,4}$	Bindungskraft zum Kontaktpunkt d („vorne“) des SCD, Senkrechte Bewegungsrichtung (${}^d z$ -Achse in der Abb. 4.2) in N
ρ_i	Winkel des Oberkörpers aus der Oberkörperantriebseinheit der linken und rechten Seite des SCD (Sensorgröße), $i \in \{l,r\}$ in rad
τ_{pc}	Zeitkonstanten der Strecke der zusätzlichen Positionsregelung in s

$\omega_{0,q}$	Eigenfrequenz des q -ten Kanals der linearisierten Dynamik in rad/s
ω_0	Eigenfrequenz des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers) in rad/s
$\omega_{i,b}$	Drehgeschwindigkeit der Radmotoren links und rechts, $i \in \{l, r\}$ in rad/s
$\omega_{i,body}$	Drehgeschwindigkeit der Oberkörpermotoren links und rechts, $i \in \{l, r\}$ in rad/s
$\epsilon_{N,3}$	Stoßzahl der Hinterräder mit dem Boden
$\epsilon_{N,4}$	Stoßzahl der Vorderräder mit dem Boden
ϕ_h	Gehäusewinkel des Inklinometers gegenüber den Gravitationslinien in rad
ϕ_{Th}	Unterkörperwinkel-Schwellwert zum Umschalten beim Zustandsübergang in rad
ϕ_{fusion}	Aus der Sensordatenfusion ermittelter Winkel ϕ in rad
ϕ_{inkl}	Winkel des Inklinometers in rad
ϕ_p	Winkel des Ausschlags des hängenden Pendels (Modell des Inklinometers) gegenüber den Gravitationslinien in rad
ϕ_{res}	Reservewinkel des Unterkörpers bei Zustandsübergängen des SCD in rad
Δ	Abweichung einer Größe von einer Ruhelage
Θ	Winkel der SCD-Drehung im absoluten (raumfesten) Koordinatensystem in rad
Φ	Vektorfunktion der Bindungen, Bindungsmatrix
Ψ	Transformationsmatrix der exakten Linearisierung
α	Vektor der Abtriebsdrehwinkel
η	Teil des Zustandsvektor \mathbf{z} nach der Transformation durch Ψ bei der exakten Linearisierung, welcher die Variablen der internen Dynamik zusammenfasst
ξ	Teil des Zustandsvektor \mathbf{z} nach der Transformation durch Ψ bei der exakten Linearisierung, welcher die Variablen der externen Dynamik zusammenfasst
τ	Vektor der Antriebsmomente
ψ	Transformationsfunktion der exakten Linearisierung (Komponente von Ψ)
δ	Bezeichnung für virtuelle Arbeit δW und Verschiebung δq_i , allgemein Variation
κ	Ordnung der <i>Lie</i> -Ableitung
π	Kreiszahl, mathematische Konstante, $\pi = 3.14159 \dots$ (<i>Ludolphs</i> che Zahl)
ρ	Aus den Größen ρ_l und ρ_r zusammengefasster Winkel des Oberkörpers vom SCD gegenüber dem Unterkörper in rad
ϕ	Winkel zum Unterkörper gegenüber der Umgebung ($^b z$ -Achse in der Abb. 4.2) in rad

Symbole

Beispiel	Beschreibung
${}^j \tilde{\omega}_i$	Drehgeschwindigkeitsmatrix des i -ten Körper im j -ten Koordinatensystem
${}^i x_j$	Index i bezieht sich auf das Koordinatensystem, Index j bezieht sich auf den Punkt. Daher kennzeichnet ${}^i x_j$ die x -Koordinate des Punktes j bezogen auf das Koordinatensystem K_i .

$f(x) _{x=z}$	Wert der Funktion $f(x)$ bei Bedingung $x = z$
$\hat{\mathbf{L}}$	Vektor bzw. Matrix der Antriebsgrößen, bei denen alle vier Antriebseinheiten auftreten. Im Gegensatz dazu beschreibt die Bezeichnung \mathbf{L} den Vektor bzw. Matrix mit dem linken und rechten Radantrieb und einem virtuellen Oberkörperantrieb.
\mathbf{M}_{ij}	Element der i -ten Spalte und der j -ten Reihe der Matrix oder des Vektors \mathbf{M}
$\mathbf{R}_x(\alpha)$	Rotationsmatrix, Rotation um die Achse x um Winkel α
$\bar{\mathbf{r}}$	Ortsvektor in homogenen Koordinaten entsprechend dem Ortsvektor in kartesischen Koordinaten \mathbf{r}
\mathbf{r}^T	Transponiert
$\ \mathbf{x}\ $	<i>Euklidische</i> Norm des Vektors \mathbf{x}
$f^{-1}(x)$	Inverswert der Funktion $f(x)$
$v_{(i)}$	Element der i -ten Spalte des Vektors \mathbf{v}
$x^{(n)}$	n -te zeitliche Ableitung der Variable x
\dot{x}	Zeitliche Ableitung $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$
x^*	Nominalwert der Variable Größe x
$\partial_x f(x, y)$	Partielle Ableitung, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$
$\partial_{xy} f(x, y)$	Mehrfache partielle Ableitung, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$
$\{i, j\}$	Menge mit Elementen i und j
\oplus	Logischer Operator ausschließlich ODER (<i>Exclusive OR</i>)
\emptyset	Leere Menge
\parallel	Parallel
\wedge	Logischer Operator UND
\vee	Logischer Operator ODER
Den	Nenner (<i>denominator</i>)
diag	Diagonalmatrix
Num	Zähler (<i>numerator</i>)
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{i \times j}$	Menge der realen Zahlen, Menge der realen positiven Zahlen, Menge der realen Matrizen der Dimension $i \times j$
Rot	Funktion einer geom. Rotation, führt zu einer Rotationsmatrix
Tran	Funktion einer geom. Translation, führt zu einer Translationsmatrix
$f'(x)$	Partielle Ableitung bei Funktionen einer Variable, $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$
<i>false</i>	Logischer Wert „falsch“ oder „0“
$q \in \mathbb{R}$	q ist ein Element der Menge \mathbb{R}
<i>true</i>	Logischer Wert „wahr“ oder „1“

Abkürzungen

2D	<u>2</u> - <u>D</u> imensional
3D	<u>3</u> - <u>D</u> imensional
A/D	<u>A</u> nalog- <u>D</u> igital
Alg.	Algorithmus
BSB	<u>B</u> lockscha <u>l</u> t <u>b</u> ild
CAD	<u>C</u> omputer- <u>a</u> ided <u>D</u> esign
CP	<u>C</u> omplementarity <u>P</u> roblem, beinhaltet sowohl LCP als auch NLCP
D/A	<u>D</u> igital- <u>A</u> nalog
DAE	<u>D</u> ifferential <u>a</u> lgebraic <u>e</u> quation (system)
DS1103	Die dSPACE Hardware-Karte
FEM	<u>F</u> inite <u>E</u> lemente <u>M</u> ethode
HDS	<u>H</u> ybrides <u>d</u> ynamisches <u>S</u> ystem
IEEE	<u>I</u> nstitute of <u>E</u> lectrical and <u>E</u> lectronic <u>E</u> ngineers
K.B.	Ober <u>k</u> örper <u>b</u> eschleunigung des SCD in longitudinaler Bewegungsrichtung
K.N.	Ober <u>k</u> örper <u>n</u> eigung des SCD in longitudinaler Bewegungsrichtung
LCP	<u>L</u> inear <u>C</u> omplementarity <u>P</u> roblem, für Kontakte in einer Ebene
MIMO	<u>M</u> ultiple <u>i</u> nput <u>m</u> ultiple <u>o</u> utput
MPC	<u>M</u> odel <u>P</u> redictive <u>C</u> ontrol
NLCP	<u>N</u> onlinear <u>C</u> omplementarity <u>P</u> roblem, für räumliche Kontakte
PC	<u>P</u> ersonal <u>C</u> omputer
PD	<u>p</u> roportional- <u>d</u> erivative
PI	<u>p</u> roportional- <u>i</u> ntegral
PT ₁	PT ₁ -Glied bezeichnet in der Regelungstechnik ein proportionales linear-zeitinvariantes Glied mit Verzögerung erster Ordnung
PT ₂	PT ₂ -Glied bezeichnet in der Regelungstechnik ein proportionales linear-zeitinvariantes Glied mit Verzögerung zweiter Ordnung
PWM	<u>P</u> ulse <u>W</u> idth <u>M</u> odulation
RC	<u>R</u> esistor <u>C</u> apacitor
RCP	<u>R</u> apid <u>C</u> ontrol <u>P</u> rototyping, Rechnergestützte Entwurfsmethode zur Steuerungs- und Regelungsentwicklung
SCD	<u>S</u> tair <u>C</u> limbing <u>D</u> evice, Treppensteigendes Gerät, das behandelte System dieser Arbeit
SISO	<u>S</u> ingle <u>i</u> nput <u>s</u> ingle <u>o</u> utput
TU	<u>T</u> echnische <u>U</u> niversität
v.c.	<u>v</u> irtual <u>c</u> onstraint, virtuelle Bindung

1 Einleitung

Die Mobilität des Menschen beeinflusst in ganz entscheidendem Maße seine Lebensqualität. Zur Unterstützung von Menschen mit Behinderungen sind deshalb unterschiedliche Möglichkeiten realisiert bzw. untersucht worden, um die Grenzen ihrer Mobilität zu erweitern. Für Rollstuhlfahrer können Treppen (und sei es nur eine Stufe oder Bordsteinkante, Abb. 1.1, links) in den täglichen Abläufen zu einer deutlichen Minderung der Mobilität führen. Die Problematik des Treppensteigens mit einem radbasierten Gerät sowie die hierzu notwendige Methodik stehen im Fokus dieser Arbeit.

Das aufgebaute treppensteigende Gerät (*Stair Climbing Device*, SCD), beschrieben in dieser Arbeit, dient zur Erprobung und Bewertung der behandelten Methodik des Treppensteigens in einer realitätsnahen Umgebung.

Das Problem des Treppensteigens mit einem Rollstuhl führt zu einer Reihe unterschiedlicher Probleme. Beim Fahren nur auf den Hinterrädern des Rollstuhls ähnelt das Problem dem eines radbasierten inversen Pendels.



Abb. 1.1: Ungünstige Situation für einen Rollstuhlfahrer (links [1]). *iBOT 3000* im Balancierungsmodus: eine Kommunikation in Augenhöhe sowie das Greifen nach höheren Gegenständen ist möglich (Mitte [2]). *iBOT 3000* beim Treppensteigen: Der Fahrer selbst oder ein Assistent verlagert manuell das Gewicht, wodurch das Treppensteigen ausgelöst wird (rechts [2]).

Das inverse Pendel ist ein klassisches Problem in der Dynamik und Regelungstechnik und wird oft zur Bewertung unterschiedlicher Regelungsalgorithmen verwendet. Im Gegensatz zu einem hängenden Pendel ist bei einem inversen Pendel das Massenzentrum des Pendelkörpers oberhalb der Drehachse und muss deshalb mittels Regelung stabilisiert werden, um die obere Ruhelage zu erhalten.

Einige technische Anwendungsbeispiele bzw. Problemanalogien sind der *Segway Personal Transporter* [3] [4], Stabilisieren einer Rakete beim Start [3], vereinfachte Betrachtung bestimmter Probleme der zweibeinigen Roboter [5] [6] und eine *tension-leg* Plattform (vertikal befestigte, schwimmende Struktur) bei der Ölförderung aus tiefen Gewässern [7]. Ein radbasiertes, inverses

Pendel wurde hinsichtlich der Modellbildung, Sensordatenfusion und Reglerentwurf am Institut für Mechatronische Systeme im Maschinenbau der TU Darmstadt untersucht [8].

Die Erweiterung ist das mehrfach inverse Pendel, z.B. das inverse Doppelpendel [9] oder inverse Dreifachpendel [10]. Als ein radbasiertes inverses Doppelpendel kann auch der treppensteigende Rollstuhl *iBOT*, dargestellt in Abb. 1.1 (Mitte und rechts), betrachtet werden. Die Bezeichnung doppelt bedeutet hierbei im Vergleich zum einfachen Pendel einen zusätzlichen Freiheitsgrad, der eingeführt wird.

Abhängig von der Situation, in welcher sich das inverse Doppelpendel befindet (z.B. alle vier Räder oder nur Hinterräder im Bodenkontakt), weist das System unterschiedliche *zeitkontinuierliche* dynamische Eigenschaften auf. Zusammengefasst mit dem *diskontinuierlichen* Charakter der Situationsübergänge (Kontaktaufnahme oder -auflösung zur Treppe) und der Wechselwirkung dieser beiden Phänomene wird die Dynamik des Gesamtsystems als *hybride Dynamik* bezeichnet.

1.1 Stand der Technik

Der Stand der Technik wird aus zwei unterschiedlichen Gesichtspunkten betrachtet. Zunächst werden unterschiedliche bestehende, radbasierte, (potentiell) treppensteigende Geräte dargestellt. Danach werden die methodischen Ansätze betrachtet, welche zur Behandlung der erwähnten Systeme oder physikalisch ähnlicher Systeme angewendet werden.

Anwendung. In der Arbeit von Ding und Cooper [2] werden unterschiedliche Technologien in elektrisch angetriebenen Rollstühlen beschrieben: Geschwindigkeitsregelung, Schlupfregelung, aktive Aufhängung, Stabilitätskontrolle gegen Umkippen, Funktion des Treppensteigens und Navigation. Bezüglich der Funktion des Treppensteigens werden auch zwei häufig verwendete Prinzipien erwähnt: raupenkettensbasierte [11] und radbasierte [12], [13]. Raupenkettensbasierte Fahrzeuge sind auch auf Treppen beweglich, die beliebige Stufenkonturen aufweisen. Deren Nachteil liegt aber im großen Gewicht sowie der Beschädigung des Treppenwegs. Bei den radbasierten Rollstühlen werden unterschiedliche Lösungsansätze erwähnt mit meistens aufwendiger Konstruktion des Rädermechanismus.

Das Prinzip des *iBOTs* (Abb. 1.1, Mitte und rechts) weist einen vergleichsweise einfacheren Mechanismus auf. Ein Regelungssystem sorgt für das Balancieren im aufrechten Zustand des Rollstuhls. Eine Einschränkung beim Treppensteigen mit dem *iBOT* stellt die Tatsache dar, dass entweder durch den sich am Geländer haltenden Fahrer selbst oder mit Hilfe eines Assistenten eine Gewichtsverlagerung herbeigeführt werden muss, um das Drehen des Fahrwerks gegenüber dem Aufbau und somit ein Steigen der nächsten Stufe auszulösen [2], [14]. Der Rollstuhl unterstützt den Fahrer beim Treppensteigen, aber eine Regelung, die zur Stabilisierung führt, ist nicht aktiv. Der Hersteller schreibt vor [14], bei dem Übergang zum oder vom Balancierungsmodus (*Balance Function*, nur zwei Räder im Bodenkontakt) einen frei befahrbaren Raum mit der Länge von mindestens 1.5 m nach vorne und hinten zu gewährleisten, weil ansonsten die Gefahr zu unerwarteten Bewegungen stattfindet. Der Übergang vom Balancierungsmodus in den Bodenkontakt mit allen vier Rädern (*4-Wheel Function*) benötigt eine Rückwärtsfahrt von ca. 10 cm (Video [15], Zeitpunkt ≈ 39 s), was auf einer Treppe zu einem Unfall führen kann.

Bei der Untersuchung unterschiedlicher radbasierter treppensteigender Geräte sind in der Literatur mehrere Lösungsansätze zu finden: Matsumoto et al. schlagen zunächst einen „Vier-Rad Roboter mit variabler Struktur“ vor, der fähig ist, eine Treppe zu steigen [16], [17], [18]. Dieser Roboter kann allerdings keine Treppen steigen, deren Trittlänge kurz gegenüber dem Achsabstand ist. Deshalb entwickelten die Autoren einen zweibeinigen Roboter auf Rädern, um auch diesen Nachteil zu eliminieren [19], [20], woraus ein noch komplexerer Mechanismus resultiert. Hashimoto beschreibt einen zweibeinigen Roboter, der von der Komplexität noch deutlich aufwendiger ist und das Steigen der Treppen mittels Füßen (ohne Räder) ermöglicht und ansonsten die Räder für das Fahren in einer Ebene benutzt [21]. Die Anwendung von Rädern bietet gegenüber mehrbeinigen und raupenkettensbasierten Robotern Vorteile hinsichtlich eines höheren Wirkungsgrades und höheren Geschwindigkeiten [22].

Methodik. Neben der Anwendung ist die Methodik, die zur Umsetzung der Funktion des Treppensteigens Verwendung findet, von großer Bedeutung. Das hier behandelte System ist hinsichtlich seiner Grundstruktur der Klasse der hybriden dynamischen Systeme zuzuordnen.

Hybride dynamische Systeme (HDS) sind Systeme mit einer Wechselwirkung aus zeitkontinuierlicher Dynamik und diskreten Ereignissen. Mit dem Begriff HDS ist man in unterschiedlichen Bereichen vertraut [23]: (i) Informatik, (ii) Modellbildung und Simulation und (iii) Systemtechnik und Regelungstechnik. In dem hier betrachteten Fall des SCD sind die letzten beiden Bereiche relevant. Ein weiterer typischer und wichtiger Anwendungsbereich ist die Regelung laufender zweibeiniger Roboter [5]. Die dynamischen Eigenschaften des Roboters sind unterschiedlich, je nachdem ob er sich mit beiden, mit nur einem oder mit keinem Bein am Boden (beim Laufen) befindet.

Für die Modellbildung des zeitkontinuierlichen Teils des HDS gibt es in mechanischen Systemen mehrere Methoden. Häufig wird das Differenzialgleichungssystem oder das differenzialalgebraische Gleichungssystem mittels der *Lagrangeschen* Methode erster Art hergeleitet. Die Methode erlaubt das Einbeziehen von sowohl holonomen als auch nichtholonomen Bindungen. An bestimmten Stellen (z.B. Gelenkbindungen, Kontakt zum Boden) bietet die Methode die Bestimmung der Ausdrücke für die jeweiligen Bindungskräfte (z.B. Normalkräfte sowie Bindungskräfte orthogonal zur Bewegungsrichtung) an. Dadurch ist es möglich, die Bedingungen zu prüfen, die das Aufrechterhalten eines bestimmten diskreten Zustands gewährleisten (z.B. muss die Normalkraft immer größer oder gleich Null sein), um den Kontakt zum Boden zu gewährleisten. Ist die Bedingung nicht erfüllt, kommt es zum Abheben und somit beginnt der Übergang zu einem anderen diskreten Zustand. Dies entspricht der Änderung der Eigenschaften der kontinuierlichen Dynamik. Im weiteren zeitlichen Verlauf mit kontinuierlichen Systemeigenschaften kann die Bedingung zum erneuten diskreten Zustandsübergang erfüllt sein. Dies kann z.B. der Kontakt mit dem Boden sein, wenn die ermittelte Distanz zum Boden kleiner oder gleich Null ist.

Beim Entstehen eines Kontaktes tritt im Allgemeinen ein Stoß auf. Durch den Stoß ändern sich abrupt die Normalgeschwindigkeiten, die im zeitkontinuierlichen dynamischen System zu berücksichtigen sind. Das Stoßverhalten wird über die Anwendung eines Stoßgesetzes beschrieben. Anhand der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß und eines bestimmten Stoßgesetzes werden die Kraftstöße berechnet und daraus die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Stoß. Somit ergibt sich eine Änderung der Geschwindigkeiten im zeitkontinuierlichen Zustandsvektor.

Zusammengefasst gibt es in mechanischen Systemen mit einer hybriden Dynamik gegenüber rein zeitkontinuierlichen Systemen folgende erweiterte Systemeigenschaften:

- Änderung der Systemstruktur, abhängig vom diskreten Zustand (Anzahl der unabhängigen (minimalen) Koordinaten des Systems ändert sich), je nach Konfiguration,
- Übergang in einen neuen diskreten Zustand nach Erfüllung bestimmter Bedingungen der Variablen des zeitkontinuierlichen Systems,
- abrupte Änderung der Variablen des zeitkontinuierlichen Systems beim Übergang von einem in den nächsten diskreten Zustand.

Spezifisch für mechanische Systeme mit Bewegungsfreiheit in einem starr begrenzten Raum ist das Entstehen einseitiger Kontakte (*unilateral contacts*) [24], die im Allgemeinen mehrfache Kontaktpunkte aufweisen. Die Vielfalt der Kontaktmöglichkeiten führt zu einem kombinatorischen Problem. Die Anzahl diskreter Zustände wächst dabei exponentiell mit der Anzahl der Kontaktmöglichkeiten [25]. Dies spricht auch einen Nachteil der Modellierung dieser Systeme im Rahmen der hybriden dynamischen Systeme an.

Eine Alternative zur Modellierung mechanischer Systeme mit unilateralen Kontakten führt zum Lösen eines linearen (LCP) [25] oder nichtlinearen Komplementaritätsproblems (NLCP) [25]. Hier ist die Behandlung einer größeren Anzahl der Kontaktsituationen ohne zusätzlichen Programmierungsaufwand in der Simulation möglich. Eine weite Verbreitung der Formulierung als komplementäres Problem ist in der Regelung von zweibeinigen Robotern bisher nicht der Fall [5], [26], außerdem steigt die Komplexität des Modells schnell mit dessen Verfeinerung. Einer der Vorteile der Darstellung als HDS gegenüber der Darstellung als Komplementaritätsproblem (CP) ist die mögliche Darstellung in unabhängigen Koordinaten, was aus regelungstechnischer Sicht das Problem transparenter erscheinen lässt.

Die ereignisbasierten (*event-driven*) numerischen Methoden, welche zum Lösen der hybriden dynamischen Systeme verwendet werden, basieren auf einer genauen Detektion des Zeitpunkts eines Ereignisses (Stoß und Kontaktaufnahme oder Kontakt Aufheben). Zu diesen Zeitpunkten wird abhängig von der Kontaktsituation das Stoßgesetz angewendet und zwischen den entsprechenden kontinuierlichen Dynamiken umgeschaltet. Zwischen zwei solchen Zeitpunkten können die üblichen Löser für kontinuierliche Systeme angewandt werden. Zwar ist bei den ereignisbasierten numerischen Methoden die Genauigkeit sehr hoch, jedoch steigt der Rechenaufwand bei Systemen mit sehr vielen Stoßsituationen erheblich [27], [28].

Statt ereignisbasierter Methoden können *time-stepping* Methoden angewendet werden. Deren Anwendung ist bei Systemen mit vielen Kontaktsituationen ratsam [29]. Vereinfacht dargestellt, bestehen diese Methoden aus einer zeitlichen Diskretisierung der Dynamik beim Lösen eines nicht-glaten Problems (Komplementaritätsproblems, CP) in jedem Schritt.

Eine Alternative zum starr begrenzten Raum (z.B. des Bodens) stellt die Modellierung mit einer Nachgiebigkeit und Dämpfung dar. Dies resultiert in numerisch steifen Differentialgleichungen [26], die wiederum die Simulation verlangsamen. Zudem erfolgt damit die Darstellung auch nicht in unabhängigen (minimalen) Koordinaten, und um den Stoß zu erfassen, ist erneut eine hybride Darstellung notwendig.

Hybride dynamische Systeme sind inhärent nichtlinear und nicht glatt, weshalb viele Resultate der Analyse und Synthese (Reglerentwurf) nicht ohne weiteres anwendbar sind [30]. Ein bedeutender Lösungsansatz im Reglerentwurf der HDS ist die modellbasierte prädiktive Regelung (*model predictive control*, MPC). Beispielhaft beschreiben Bemporad et al. ein als HDS modelliertes mechatronisches System, bei dem ein hybrider MPC Regler zum Positionieren zweier Massen mit der Anforderung nach sanftem Anlegen angewendet wird [31].

Eine andere Entwicklungsrichtung für Analyse und Reglerentwurf von HDS folgt aus der Anwendung auf zweibeinige Roboter [5]. Die diskreten Zustände hängen von der Situation ab, in der sich der Roboter befindet: (i) beide Füße am Boden, (ii) nur ein Fuß am Boden, (iii) kein Fuß am Boden. Beim Gehen oder Laufen wechseln die Zustände entsprechend. Die radbasierten treppensteigenden Geräte und zweibeinigen Roboter haben das hybride Systemverhalten gemeinsam. Dies bezieht sich auf eine situationsbedingt veränderliche Struktur und somit unterschiedliche Systemdynamik in einzelnen Situationen. Deshalb ist es interessant, die Vorgehensweise des Reglerentwurfs bei zweibeinigen Robotern zu betrachten. Generell können die Methoden in zwei Gruppen geteilt werden [5]. Die eine Gruppe stellt zeitabhängige Methoden dar. Es werden Solltrajektorien für Gelenke des Roboters erstellt, und mittels Regelung wird das System stabilisiert und den Solltrajektorien gefolgt. In der bereits erwähnten Quelle [17] wird in der Regelung des treppensteigenden Roboters die Referenztrajektorie auch als eine parametrisierbare Zeitfunktion vorgegeben. Eine andere Gruppe der Methoden stellt anstatt der Referenzgrößen im Zeitbereich bestimmte Referenzgrößen als Funktion des Roboterzustandsvektors auf. Dies kann man als bestimmte virtuelle (nicht konstruktionsbedingte, sondern durch Regelungsrückführung bestimmte) holonome oder nichtholonome Bindungen definieren. Von Interesse ist beim Gehen die Stabilität des Grenzzyklus (und nicht die Stabilität der Ruhelagen), die anhand von *Poincaré maps* analysiert werden kann. Die Regelung nichtlinearer Systeme kann im Allgemeinen mittels exakter Linearisierung¹ (*feedback linearization*) angegangen werden. In den hier betrachteten Systemen wird üblicherweise eine partielle exakte Linearisierung durchgeführt, weil der relative Grad des Systems meistens kleiner ist als die Ordnung des Systems und somit die Nulldynamik (*zero dynamics*) für die dynamischen Eigenschaften des Systems wichtig ist.

Im Gegensatz zu stabilen Grenzzyklen, welche in der Anwendung für zweibeinige Roboter beim Gehen im Vordergrund stehen, kann sich bei unteraktuierten mechanischen Systemen die Regelungsaufgabe auf Stabilisieren inhärent instabiler Ruhelagen erstrecken. So wird in [32] ein radbasiertes inverses Doppelpendel („WArobot“) lokal linearisiert und darauf ein linearer Zustandsregler (LQR) mit *gain scheduling* angewendet, um die inhärent instabilen Ruhelagen lokal zu stabilisieren. In [33] wird ein inverses Doppelpendel mit fixiertem Drehpunkt des Unterkörpers („Acrobot“) für den Zweck eines Aufschwingens von der unteren (stabilen) in die obere instabile Ruhelage partiell exakt linearisiert. Nach dem Annähern an die instabile Ruhelage wird auf einen linearen Zustandsregler (LQR) umgeschaltet, um eine lokale asymptotische Stabilisierung durchzuführen. In [34] wird der „Acrobot“ ebenfalls partiell exakt linearisiert, aber im Gegensatz zu [33] wird hier das verbleibende nichtlineare System (und nicht das ursprüngliche) in der instabilen Ruhelage lokal linearisiert. Darauf wird ein lineares Regelgesetz (LQR) angewendet, um die Ruhelage lokal asymptotisch zu stabilisieren.

¹ Die Begriffe exakte Linearisierung, relativer Grad und Nulldynamik werden im Kapitel 2.4 beschrieben.

Ein weiterer Aspekt bei der Betrachtung der mechanischen HDS ist der elastische Stoß. Bei der Regelung mechanischer Systeme wird der Stoß in den meisten Ansätzen als unelastisch betrachtet. Es gibt Fälle, wo das durchaus gerechtfertigt ist, manchmal kann diese Annahme die Qualität der Ergebnisse aber deutlich mindern. Derzeit gibt es nicht viele anwendungsorientierte Arbeiten über hybride dynamische Systeme mit elastischen Stößen. Einige bestehende seien im Folgenden erwähnt. Ronse et al. [35] und Sanfelice et al. [36] betrachten einen springenden Ball in unterschiedlichen Anwendungen, Bourgeot und Brogliato [37] stellen eine Regelung von mechanischen Systemen mit einseitigen Bindungen vor und demonstrieren sie am Beispiel eines zwei-Gelenk-Roboters unter Betrachtung eines elastischen Stoßes.

1.2 Ziele

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer Methodik, welche auf radbasierte treppensteigende Geräte angewendet werden kann. Das Ergebnis soll anhand eines treppensteigenden Geräts (*Stair Climbing Device*, SCD), welches mindestens eine Stufe selbständig steigen können soll, experimentell überprüft werden. Ein solches Gerät bietet den Vorteil eines kleineren Energiebedarfs und einer potentiell höheren Geschwindigkeit gegenüber raupenbasierten und mehrbeinigen Robotern [22]. Der Mechanismus, der benötigt wird, um die treppensteigende Funktion zu ermöglichen, soll möglichst einfach und kostengünstig sein, ähnlich zum *iBOT* (Abb. 1.1, Mitte, rechts [2]), bestehend aus einem Unterkörper (Fahrwerk) und Oberkörper (Aufbau) Abb. 1.2.

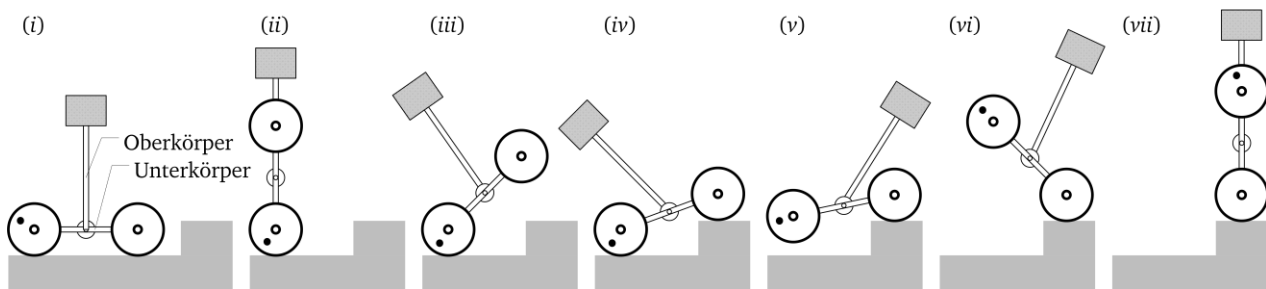


Abb. 1.2: Darstellung unterschiedlicher Situationen des SCD beim Steigen einer Treppe in der Seitenansicht. Mit dem schwarzen Punkt sind die Hinterräder gekennzeichnet.

In Abb. 1.2 sind unterschiedliche Situationen des SCD dargestellt (detailliertere Zeichnung in Abb. 3.3). Das SCD verfügt über vier angetriebene Räder. Im Drehgelenk, welches den Unter- und Oberkörper verbindet, ist ein Antrieb angebracht, der den Winkel verstellt.

In einer Reihe unterschiedlicher Situationen (Abb. 1.2 (i) bis (vii)) soll das SCD, mit bestimmten Bewegungsabläufen der einzelnen Körper, Treppen steigen.

Grundlegende Funktionalität. Der Fokus der Arbeit liegt auf den entsprechenden steuerungs-/regelungstechnischen modellbasierten Methoden, welche die Machbarkeit eines selbständigen Treppensteigens des SCD beweist. In der grundlegenden Funktionalität sind folgende Teilfunktionen inbegriffen:

- Stabiles Fahren mit Bodenkontakt auf allen vier Rädern (Abb. 1.2, (i)). Bei der Betrachtung der SCD-Bewegung nur in der Ansichtsebene stehen in dieser Situation zwei Aktoren

(Radantrieb und Körperantrieb) zur Verfügung, um zwei Freiheitsgrade (Position des SCD und Neigung des Oberkörpers) unabhängig zu beeinflussen. Diese Eigenschaft entspricht einem vollaktuierten (*fully actuated*) System.

- Stabiles Fahren und Drehen mit Bodenkontakt auf zwei Rädern mit der Möglichkeit der Verstellung des Winkels zwischen dem Ober- und Unterkörper und Erhalt der aufrechten Ruhelage (Abb. 1.2, (ii) oder (iii)). Im Gegensatz zum vorherigen Punkt bleibt die Anzahl der Aktoren gleich, es kommt aber zusätzlich noch ein Freiheitsgrad hinzu (Neigung des Unterkörpers). Diese Eigenschaft entspricht einem unteraktuierten (*underactuated*) System. In diesem Zustand ist auch ein Gieren möglich.
- Selbständiges, stabiles Abheben vom Boden (oder von einer Stufe) und Übergang zum Erhalt der aufrechten Ruhelage (Abb. 1.2, (i)→(iii)),
- Selbständiges stabiles Absetzen zum Boden (oder zu einer Stufe) und Übergang zum Erhalt der aufrechten Ruhelage (Abb. 1.2, (iii)→(iv)).

Im Gegensatz zum *iBOT* soll das SCD aufgrund einer anderen Strategie des Absetzens und einer aktiven Regelung, selbständig und nicht durch manuelle Unterstützung von außen Treppen steigen können, was die Selbständigkeit des Treppensteigens ermöglicht.

Die verwendete Methodik kann unmittelbar auf treppensteigende Rollstühle angewendet werden. Unabhängig von treppensteigenden Rollstühlen sind weitere Anwendungen, die ein Treppensteigen verlangen, denkbar. Als Beispiel seien zwei Systeme erwähnt, die nach dem Prinzip des balancierenden inversen Pendels arbeiten: das *Segway*-Fahrzeug [4] einerseits und andererseits ein Telepräsenz-Roboter (Avatar) [38], der die Anwesenheit eines Menschen nachahmt. Die Mobilität dieser Geräte würde sich in den für Menschen geschaffenen Räumlichkeiten nach dem in dieser Arbeit angedachten System erheblich erweitern.

Durch die Eigenschaften des SCD stimmt das Forschungsthema dieser Arbeit mit einem empfohlenen Forschungsthema, veröffentlicht im Bericht *The Impact of Control Technology* [39] von der IEEE Control Systems Society (Februar 2011, Kapitel *Control in Robotics* [40]) vollständig überein: es bedarf eines Fortschritts in Regelungsmethodik, um mehrbeinige Roboter praxistauglich zu machen. Dieses Problem ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- hybride nichtlineare Dynamik,
- einseitige Bindungen (*unilateral constraints*) und
- Unteraktuiertheit (*underactuation*).

Aus der Aktualität des behandelten Themas kann erwartet werden, dass die Resultate dieser Arbeit ein breiteres Anwendungsgebiet haben.

1.3 Fazit

In dieser Arbeit wird ein radbasiertes treppensteigendes Gerät (SCD) behandelt. Das SCD kann als ein radbasiertes inverses Doppelpendel betrachtet werden. Es soll mit einer definierten grundlegenden Funktionalität die Machbarkeit des Treppensteigens nachweisen.

Bisher sind radbasierte Geräte oder Roboter, die nach dem Prinzip des in dieser Arbeit vorgestellten SCD selbständig mehrere Treppen steigen können, nach dem Wissen des Autors, nicht bekannt. Das Gerät mit der größten Ähnlichkeit ist der treppensteigende Rollstuhl *iBOT*, welcher aber zum Treppensteigen eine manuelle Assistenz von außen benötigt.

Der wesentliche Beitrag dieser Arbeit liegt in der angewendeten Strategie, welche zum selbständigen Treppensteigen führt. Darüber hinaus gibt es einen Beitrag zur Behandlung von unteraktuier-ten hybriden nichtlinearen Systemen mit einseitigen Bindungen.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der mathematischen Modellbildung mechanischer Systeme und der verwendeten regelungstechnischen Methoden beschrieben. Es werden die verwendeten Begriffe kurz beschrieben, um einen Ausgangspunkt und den Rechenweg für die Kapitel 4 und 5 anzugeben. Dabei werden nur die Methoden und Begriffe aufgegriffen, die den Schwerpunkt der Untersuchung direkt betreffen. Zur Erklärung von weiteren Methoden und Begriffen, die darüber hinaus verwendet werden, wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Nach der Art der Modellbildung mechanischer Systeme kann eine Unterscheidung zwischen Mehrkörpersystemen, Finite-Elemente-Systemen und kontinuierlichen Systemen vorgenommen werden [41] [42]. Alle diese mechanischen Modelle führen zu Bewegungsgleichungen [41] [42], unterscheiden sich aber unter anderem durch die Eigenschaften der Körper: z.B. Elastizität der Körper bei kontinuierlichen Systemen im Gegensatz zu starren Körpern bei Mehrkörpersystemen. In der Betrachtung als Mehrkörpersystem besteht das System aus einzelnen diskreten Elementen: Trägheit, Elastizität, Dämpfung und Kraft. Des Weiteren wird in dieser Arbeit in der Betrachtung des mechanischen Systems davon ausgegangen, dass eine Modellierungsart als Mehrkörpersystem gerechtfertigt ist, da die Starrkörperdynamik und die hochfrequente Dynamik gut trennbar sind.

Der Begriff *kontinuierliches System* sollte mit dem Begriff *zeitkontinuierliche Dynamik* in dieser Arbeit nicht verwechselt werden. Unter dem Begriff „mechanische Systeme mit zeitkontinuierlicher Dynamik“ werden Systeme verstanden, bei denen unter Wirkung der Kräfte bzw. Momente die Körpergeschwindigkeiten stetige Funktionen der Zeit darstellen [43]. Die Körper solcher Systeme bewegen sich in einem freien Raum oder entlang vorgegebener Trajektorien. Im Gegensatz dazu werden unter mechanischen Systemen mit *diskontinuierlicher Dynamik* Systeme mit unstetigen Änderungen der Geschwindigkeiten verstanden. Solche Änderungen treten bei Bewegungen der Körper in begrenzten Räumen auf. Bei Begegnung der Grenze eines Raumes erfährt das System in *zeitdiskreten* Punkten eine Impulsänderung und die Geschwindigkeit ändert sich unstetig. Betrachtet man das System in Wechselwirkung beider dynamischer Phänomene, erhält man ein System mit *hybrider Dynamik*. Im Allgemeinen ist die Dynamik eines hybriden Systems durch das Zusammenwirken kontinuierlicher und diskreter Phänomene sehr komplex und enthält Verhaltensweisen, die in rein zeitkontinuierlicher Dynamik nicht enthalten sind [43].

Die modellierten Bewegungsgleichungen sind zeitkontinuierliche, nichtlineare Differenzialgleichungen. Bei glatten² Funktionen kann eine lokale Linearisierung³ der nichtlinearen Modelle vorgenommen werden und auf die Methoden der linearen Systemtheorie zurückgegriffen werden. Diese linearisierte Dynamik ist jedoch nur in kleinen Bereichen um den jeweiligen Arbeitspunkt gültig. Weiterhin liefern Methoden zur linearen Analyse in manchen Situationen keine ausrei-

² Glatte Funktion ist stetig und ausreichend oft differenzierbar.

³ Lokale Linearisierung entspricht der *Taylor-Approximation* erster Ordnung in einem bestimmten Arbeitspunkt.

chende Information über das betrachtete nichtlineare System [44]. Ebenfalls sind lineare Regler nur in einem kleinen Bereich um den jeweiligen Arbeitspunkt gültig. Für den vorliegenden großen Arbeitsbereich wird deshalb auf Methoden nichtlinearer Systeme zurückgegriffen.

Für klassische Themen der nichtlinearen Systeme, wie die Analyse der Stabilität nach *Ljapunov* und die Systemanalyse anhand Beschreibungsfunktionen, ist eine Übersicht in [45] gegeben. Eine anschauliche Beschreibung der notwendigen Begriffe wie orbitale Stabilität (*orbital stability*), Bewegungsstabilität (*stability of motion*) nach *Ljapunov* und Stabilität der Ruhelagen (*stability of equilibrium point*) nach *Ljapunov* ist in [46] gegeben. Methoden der nichtlinearen Regelung einschließlich der exakten Linearisierung, welche in dieser Arbeit verwendet wird, und im Gegensatz zur lokalen Linearisierung einen globalen Charakter aufweist, sind in [47] und den Standardwerken [44], [48] und [49] dargestellt.

Die hybride Dynamik des hier betrachteten SCD wird mittels einer geeigneten Strategie, den diskreten Zuständen entsprechend, mit dem Umschalten im Regelgesetz behandelt. Für die Zustandsübergänge scheint das auf der exakten Linearisierung beruhende Konzept der virtuellen Bindungen, welches in [5] für laufende Roboter verwendet wurde, vielversprechend. Statt dem Stabilisieren einer Ruhelage ermöglicht es für unteraktuierte Systeme ein Stabilisieren von Grenzyklen.

In einzelnen Punkten der Arbeit wird auf die Begriffe und Methoden von linearen Systemen zurückgegriffen (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, minimal- bzw. nicht minimalphasige Eigenschaft, ...), die in regelungstechnischer Literatur ausführlich betrachtet worden sind. Diesbezüglich wird beispielsweise auf Quellen [50] und [51] hingewiesen.

2.1 Mechanische Systeme mit zeitkontinuierlicher Dynamik

Das Modell der zeitkontinuierlichen Dynamik wird mittels eines Systems von Bewegungsgleichungen dargestellt. Die verwendete Herleitung der Bewegungsgleichungen nach der *Lagrangeschen* Formulierung bietet einige Vorteile [52]: Systematische Vorgehensweise und Erhalten der Bewegungsgleichungen in einer kompakten Form (beinhaltet die Trägheitsmatrix, Matrix der Zentrifugal- und *Coriolis*-Kräfte und Vektor der Gravitationskräfte), was vorteilhaft für den Reglerentwurf ist.

Die schematische Darstellung des Vorgehens bei der Modellbildung ist in Abb. 2.1 vorgestellt, wobei die einzelnen Begriffe in den nächsten Unterkapiteln beschrieben werden. Zunächst wird der geometrische bzw. kinematische Zusammenhang einzelner Körper mit Einbeziehen der entsprechenden Bindungen benötigt. Danach erhält man mit Betrachtung der Kinetik und Einbeziehen der wirkenden Kräfte bzw. Momente und Wirkung der Trägheit einzelner Körper das Modell der Dynamik.

In der Kinematik (Kapitel 2.1.1) wird die Geometrie der Bewegungen von Punkten und Körpern betrachtet, wobei die Kräfte und Momente, welche die Bewegung verursachen, nicht betrachtet werden [53]. Mit Betrachtung der Kinetik (Kapitel 2.1.2) wird zusätzlich die Ursache einer Bewegung berücksichtigt [41].

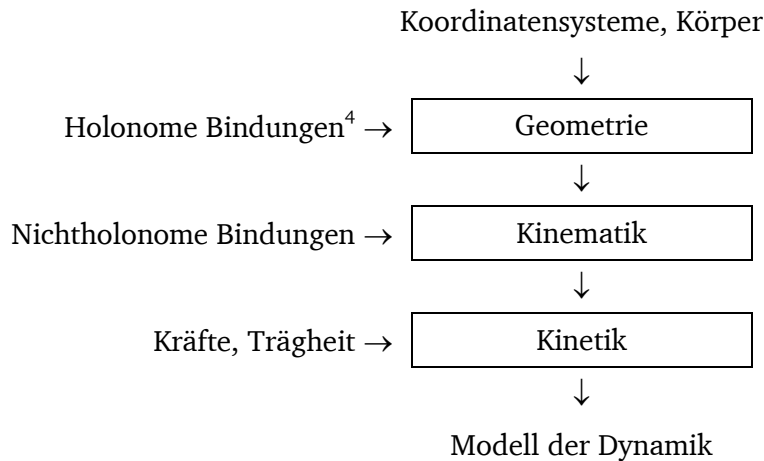


Abb. 2.1: Schema der Herleitung des Modells der Dynamik. In Kästchen sind die zu behandelnden Themen dargestellt. Die restlichen Begriffe stellen die Ein- bzw. Ausgangsdaten dar.

2.1.1 Kinematik

Geometrie. Ein Körper ist im eigenen Koordinatensystem oder in einem absoluten Koordinatensystem geometrisch vollkommen durch seine Position und Orientierung beschrieben. Häufig werden bestimmte repräsentative Punkte am Körper definiert.

Als Beispiel wird der Punkt P in unterschiedlichen kartesischen 3D-Koordinatensystemen betrachtet, wie in Abb. 2.2 dargestellt, einmal aus dem raumfesten absoluten Koordinatensystem K_a , bestehend aus den Koordinatenachsen $^a x$, $^a y$, $^a z$ und dem Koordinatenursprung a und das andere Mal aus dem Koordinatensystem K_b , bestehend aus den Koordinatenachsen $^b x$, $^b y$, $^b z$ und dem Koordinatenursprung b . Das Koordinatensystem K_b kann ein beliebiges Koordinatensystem darstellen, raum- oder körperfest.

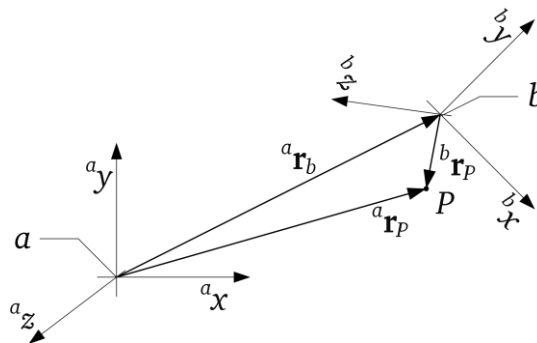


Abb. 2.2: Der Punkt P in Betrachtung der unterschiedlichen kartesischen 3D-Koordinatensysteme.

Dabei wird die Konvention verwendet, bei der hochgestellte Indizes vor der entsprechenden Koordinatenachse sich auf das Koordinatensystem beziehen, in dem der bestimmte Punkt betrachtet wird. In der Abb. 2.2 ist K_b gegenüber K_a um den Ortsvektor (Radiusvektor) $^a \mathbf{r}_b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ verschoben und um entsprechende Winkel um die Koordinatenachsen $^b x$, $^b y$ und $^b z$ gedreht. Entspre-

⁴ Holonome und nichtholonome Bindungen werden im Kapitel 2.1.1 beschrieben.

chend der soeben erwähnten Konvention stellt der Ortsvektor ${}^a\mathbf{r}_P \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ die Position des betrachteten Punktes P in K_a dar und ${}^b\mathbf{r}_P \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ die Position des betrachteten Punktes P in K_b dar.

Um die geometrischen Verhältnisse der Körper, betrachtet in unterschiedlichen Koordinatensystemen, behandeln zu können, werden *homogene Transformationen*⁵ [52] [54] [55] eingeführt. Dementsprechend wird der Ortsvektor, bestehend aus den kartesischen Koordinaten, um ein viertes Eins-Element erweitert. Somit lauten die zur Abb. 2.2 verwendeten homogenen Koordinaten

$${}^a\bar{\mathbf{r}}_b = \begin{bmatrix} {}^ax_b \\ {}^ay_b \\ {}^az_b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^a\bar{\mathbf{r}}_P = \begin{bmatrix} {}^ax_P \\ {}^ay_P \\ {}^az_P \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^b\bar{\mathbf{r}}_P = \begin{bmatrix} {}^bx_P \\ {}^by_P \\ {}^bz_P \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Falls ein Punkt beispielsweise mit ${}^b\bar{\mathbf{r}}_P \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ in einem Koordinatensystem beschrieben ist und die Transformation zwischen den Koordinatensystemen K_b zu K_a bekannt ist, kann der gleiche Punkt, betrachtet im Koordinatensystem K_a , einfach überführt werden. Dies geschieht mittels Matrixmultiplikation

$${}^a\bar{\mathbf{r}}_P = {}^a\mathbf{T}_b {}^b\bar{\mathbf{r}}_P \quad (2.2)$$

Dabei stellt die Matrix ${}^a\mathbf{T}_b \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ die homogene Transformation dar

$${}^a\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & {}^a\mathbf{r}_b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Durch eine Matrix dieser Art wird auf einheitliche Weise sowohl die Translation als auch die Rotation von K_b zu K_a mittels Multiplikation durchgeführt. Diese beinhaltet den Translationsvektor ${}^a\mathbf{r}_b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, der im zuvor betrachteten Beispiel als Komponenten die Werte des Vektors ${}^a\bar{\mathbf{r}}_b$ annimmt

$${}^a\mathbf{r}_b = [{}^ax_b \quad {}^ay_b \quad {}^az_b]^T. \quad (2.4)$$

Weiterhin stellt die Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Rotationen, zusammengesetzt um jeweils die x -, y - und z -Achse dar. Es werden folgende Rotationsmatrizen definiert, beginnend mit der Rotation um die x -Achse

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

Rotation um die y -Achse

⁵ Die dazugehörigen *homogenen Koordinaten* wurden von August Ferdinand Möbius eingeführt. Mit diesen Koordinaten ist eine einheitliche Beschreibung der Translation und Rotation durch Matrixmultiplikation möglich.

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

und Rotation um die z-Achse

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Besteht eine Transformation nur aus einer Translation, kann das als Funktion $\text{Tran}(^a x_b, ^a y_b, ^a z_b)$ geschrieben werden. Dementsprechend lautet die allgemeine Transformationsmatrix (2.3) dann $\begin{bmatrix} \mathbf{E} & ^a \mathbf{r}_b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$, mit der Einheitsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Besteht eine Transformation nur aus einer Rotation, kann das als Funktion $\text{Rot}_i(j)$ geschrieben werden. $\text{Rot}_i(j)$ und dementsprechend vereinfacht sich die allgemeine Transformationsmatrix (2.3) dann zu $\begin{bmatrix} \mathbf{R}_i(j) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$, mit dem Nullvektor in der vierten Spalte $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Einige nützliche Eigenschaften der homogenen Transformationsmatrizen [55] stellen die Inverse der Transformationsmatrix

$$^a \mathbf{T}_b^{-1} = ^b \mathbf{T}_a, \quad (2.8)$$

sowie das Anreihen der Transformationen mehreren Koordinatensysteme aneinander

$$^a \mathbf{T}_b {}^b \mathbf{T}_c \dots {}^v \mathbf{T}_w = ^a \mathbf{T}_w \quad (2.9)$$

dar.

Anwendungsbeispiele sind bei der Modellbildung im Kapitel 4.1.1 gegeben.

Bei dynamischen Systemen sind die beschreibenden Koordinaten zeitabhängig: $x = x(t)$, $y = y(t)$, ... usw. Zur kompakten Darstellung wird auf die Bezeichnung der Zeitabhängigkeit häufig verzichtet. Demnach sind auch zeitliche Ableitungen der betrachteten Koordinaten in der kurzen Form gegeben: \dot{x} , \dot{y} , ... usw.

Geschwindigkeit. In der Betrachtung der Dynamik eines Mehrkörpersystems sind die Geschwindigkeiten der einzelnen Körper entscheidend. Die Translationsgeschwindigkeiten können mittels zeitlicher Ableitungen der jeweiligen Ortsvektoren $^a \dot{\mathbf{r}}_i$ hergeleitet werden.

Die Drehgeschwindigkeit des i -ten Körpers im körpereigenen Koordinatensystem ist durch die entsprechende Drehgeschwindigkeitsmatrix aus der jeweiligen Rotationsmatrix $^a \mathbf{R}_i$ und deren zeitlicher Ableitung $^a \dot{\mathbf{R}}_i$ mittels folgender Beziehung bestimmt [41]:

$$^a \dot{\mathbf{R}}_i = ^a \mathbf{R}_i {}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i. \quad (2.10)$$

In Gleichung (2.10) stellt ${}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ die Drehgeschwindigkeitsmatrix des i -ten Körpers dar

$${}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i\omega_{i,z} & {}^i\omega_{i,y} \\ {}^i\omega_{i,z} & 0 & -{}^i\omega_{i,x} \\ -{}^i\omega_{i,y} & {}^i\omega_{i,x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Die Komponenten der Drehgeschwindigkeitsmatrix ${}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ formen den Drehgeschwindigkeitsvektor ${}^i\boldsymbol{\omega}_i$

$${}^i\boldsymbol{\omega}_i = \begin{bmatrix} {}^i\omega_{i,x} \\ {}^i\omega_{i,y} \\ {}^i\omega_{i,z} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Bindungen. Bei Bewegung der Körper eines Mehrkörpersystems gibt es möglicherweise Begrenzungen auf die Bewegungsart der einzelnen Körper gegeneinander und Begrenzungen gegenüber der Umgebung. In deren unterschiedlichster Art werden diese Begrenzungen in mathematischer Form als Bindungen, oft auch als Zwangsbedingungen gekennzeichnet und beschrieben. Der volle Sinn der Betrachtung von Bindungen wird im Rahmen der Behandlung der Kinetik sichtbar.

Man unterscheidet zeitlich abhängige, *rheonome* Bindungen und zeitlich unabhängige, *skleronome* Bindungen [56]. In Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich skleronome Bindungen behandelt.

Weiterhin bezeichnet man die Bindungen, die in der Form

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \Phi_{m_{hol}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

darstellbar sind, als *holonom*. Der Vektor $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ besteht aus kartesischen oder verallgemeinerten⁶ Koordinaten. Die Funktion $\Phi_i, i \in \{1, \dots, m_{hol}\}$ bindet die Position eines Körpers im Raum oder zu einem anderen Körper des betrachteten Systems. Da somit einzelne Koordinaten des Vektors \mathbf{q} voneinander abhängig sind, nennt man den Vektor \mathbf{q} auch Vektor der *abhängigen Koordinaten*.

Im Gegensatz zu den abhängigen Koordinaten \mathbf{q} nennt man eine minimale Anzahl der Koordinaten, die vollständig den Zustand des betrachteten Systems beschreiben, als Vektor der *unabhängigen Koordinaten* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{n-m_{hol}}$. Ein Beispiel für ein holonomes System stellt ein Rad während der Bewegung in einer Ebene dar (Anhang, Kapitel B.2.1).

⁶ Die verallgemeinerten Koordinaten beinhalten auch beispielsweise Winkel oder auch zusammengesetzte Größen wie Länge etc.

Die Anzahl der freien Lagekonfigurationen des Systems, der *Freiheitsgrade der Lage* $d_{fp} = n - m_{hol}$, ist gleich der Anzahl der unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} . Beim zeitlichen Ableiten der Bindungen (2.13) $\Phi(\mathbf{q}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$ ändert sich die Anzahl der Bindungen nicht. Somit ist die Anzahl der *Freiheitsgrade der Geschwindigkeit* d_{fv} gleich der Anzahl der Freiheitsgrade der Lage $d_{fp} = d_{fp}$.

Treten in den Bindungen Geschwindigkeiten auf, womit diese Bindungen nur in einer differenziellen Form auszudrücken sind

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad \text{mit } \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m_{hol} \times n}, \quad (2.14)$$

gehört diese Art der Bindungen zu den *nichtholonomen* Bindungen. Um in die Beschleunigungsform zu kommen, ist eine zeitliche Ableitung dieser Bindungen möglich, nicht aber eine Integration, um auf die Positionsform zu gelangen – zumindest nicht analytisch. Ob die Integrierbarkeit in einer analytischen Form vorhanden ist, kann mittels Bedingungen der Integrierbarkeit geprüft werden [57] (Anhang, Kapitel B.1). Ein Beispiel für ein nichtholonomes System stellt ein Rad während der Bewegung im 2D-Raum dar (Anhang, Kapitel B.2.2).

Da bei nichtholonomen Systemen die Geschwindigkeiten gebunden sind, ist bei solchen Systemen die Anzahl der *Freiheitsgrade der Geschwindigkeiten* d_{fv} von Bedeutung. Die Anzahl der Lagefreiheitsgrade bei nichtholonomen Systemen ist, im Gegensatz zu den holonomen Systemen, größer als die Anzahl der unabhängigen Koordinaten $d_{fp} > d_{fv}$ [53].

Im Allgemeinen kann sowohl für holonome als auch für nichtholonome Bindungen der Vektor der unabhängigen Variablen \mathbf{v} anhand entsprechender Abhängigkeit in der Matrixform mit dem Vektor der abhängigen Koordinaten verbunden werden

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}. \quad (2.15)$$

Beim Einsetzen des Vektors $\dot{\mathbf{q}}$ in (2.14) folgt die Orthogonalitätsbeziehung zwischen den freien und gesperrten Raumrichtungen [53]

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Zusammenfassend können die beschriebenen Bindungsarten übersichtlich in Tab. 2.1 kompakt dargestellt werden.

Tab. 2.1: Kompakte Darstellungsweise der holonomen und nichtholonomen Bindungen in unterschiedlichen Niveaus. Die Darstellung ist auf skleronome Bindungen beschränkt.

Niveau	Holonome Bindung	Nichtholonome Bindung
Position ^{*1}	$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$	analytisch nicht darstellbar
Geschwindigkeit	$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}^{*2}$	$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$
Beschleunigung	$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$	$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

^{*1}) Bemerkung: Dies gilt sowohl für Positionen als auch für die Orientierung. Dementsprechend wird in den nächsten Zeilen auch die Drehgeschwindigkeit bzw. Drehbeschleunigung einbezogen.

^{*2}) Bemerkung: $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$, *Jacobi-Matrix*.

2.1.2 Kinetik

Um die Dynamik eines Systems analysieren zu können und einen aktiven Einfluss in das Verhalten des Systems mittels Kräfte bzw. Momente nehmen zu können, ist die Betrachtung der Kinetik des Systems notwendig.

Die Kinetik des in dieser Arbeit behandelten Systems wird im Rahmen der klassischen Mechanik betrachtet, was durch die Größe und auftretenden Geschwindigkeiten dieser Objekte berechtigt ist [58]. Weiterhin wird angenommen, dass die Effekte der Erddrehung durch die Zentrifugal- und *Coriolis* Kraft bei den hier betrachteten Systemen vernachlässigbar sind. Dies hat als Konsequenz eine Vereinfachung der kinetischen Betrachtung unter der Annahme des erdgebundenen (absoluten) Koordinatensystems als Inertialsystem.

Auswahl der Koordinaten. Für die Behandlung der Kinetik ist es notwendig, eine geeignete Auswahl der Koordinaten zu treffen. Bei Betrachtung holonomer Bindungen in einem System können die Koordinaten so ausgewählt werden, dass durch die holonomen Bindungen abhängige Koordinaten nicht auftreten. Das System wird durch unabhängige verallgemeinerte Koordinaten komplett beschrieben. In diesem Fall kann die Dynamik des Systems mit *Lagrangeschen* Gleichungen zweiter Art (*Lagrange II*) beschrieben werden. Man erhält allerdings keine Lösung der auftretenden Bindungskräfte im System, welche hier benötigt werden, wie später gezeigt wird. Bei Systemen mit nichtholonomen Bindungen [59] oder bei Systemen mit benötigter Information über die Werte der Bindungskräfte, werden *Lagrangesche* Gleichungen erster Art (*Lagrange I*) verwendet.

Lagrange I. Die *Lagrange I* Matrix-Gleichung für ein mechanisches System mit n abhängigen Koordinaten [52] ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}^T} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^T} = \mathbf{Q}_{ext} + \mathbf{\Phi}_q^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.17)$$

Dabei ist $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ die kinetische Energie des Systems. Die kinetische Energie des Systems kann nach dem Satz von *König* als die Summe der kinetischen Energie bezüglich der Translationsgeschwindigkeiten und kinetischen Energie der Rotationsgeschwindigkeiten gegeben werden [57]

$$T = T_{tran} + T_{rot}. \quad (2.18)$$

Dabei stellt T_{tran} die kinetische Energie der Translationsbewegung der Massenzentren gegenüber dem raumfesten Koordinatensystem der jeweiligen i -ten Körper dar

$$T_{tran} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i {}^a \dot{\mathbf{r}}_i^T {}^a \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.19)$$

Die Masse des i -ten Körpers ist mit m_i bezeichnet und das Quadrat der Translationsgeschwindigkeit ist mit dem absoluten Wert der entsprechenden Ortsvektor-Geschwindigkeit ${}^a \dot{\mathbf{r}}_i$ gegeben.

Die kinetische Energie der Rotation T_{rot} kommt durch die Drehbewegung des i -ten Körpers um sein Massenzentrum zustande

$$T_{rot} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} {}^i \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{J}_{cm,i} {}^i \boldsymbol{\omega}_i. \quad (2.20)$$

Hier stellt $\mathbf{J}_{cm,i}$ die Trägheitsmatrix des i -ten Körpers um das eigene Massenzentrum und ${}^i \boldsymbol{\omega}_i$ den Drehgeschwindigkeitsvektor des Körpers um das eigene Massenzentrum dar. Die Orientierung des körpergebundenen Koordinatensystems kann dabei so gewählt werden, dass die Trägheitsmatrix $\mathbf{J}_{cm,i}$ nur Diagonalelemente enthält, welche die Hauptträgheitselemente darstellen.

Die Funktion $V = V(\mathbf{q})$ stellt die potentielle Energie des Systems dar. Das System enthält diese Energie beispielsweise durch Federelemente zwischen relativen Lagen der Körper oder Gravitation. Bei Betrachtung der Gravitation beträgt die potentielle Energie

$$V = \sum_{i=1}^n m_i g {}^a z_i. \quad (2.21)$$

Mit $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist die Erdschwerebeschleunigung bezeichnet. Unter der Annahme, dass die Gravitationslinien parallel mit der ${}^a z$ -Achse des absoluten, raumfesten Koordinatensystems K_a verlaufen, stellt ${}^a z_i$ die Höhe des jeweiligen Körpers über einem Ausgangspunkt des gemeinsamen raumfesten Koordinatensystems dar.

Die externen Kräfte bzw. Momente \mathbf{Q}_{ext} können als generalisierte Kräfte bzw. Momente entsprechend der jeweiligen generalisierten Koordinate eingeführt werden. Diese Kräfte bzw. Momente verrichten die virtuelle Arbeit am System [59]

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_{ext,i} \delta q_i. \quad (2.22)$$

Das Produkt $\Phi_q^T(\mathbf{q}) \lambda$ stellt die Bindungskräfte dar

$$\mathbf{Q}_c = \Phi_q^T(\mathbf{q}) \lambda. \quad (2.23)$$

Die $\Phi_q^T(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist die transponierte Matrix der allgemein nichtholonomen Bindungen (Tab. 2.1) und $\lambda \in \mathbb{R}^m$ der Vektor der *Lagrangeschen* Multiplikatoren. Charakteristisch für die Bindungskräfte ist, dass sie keine Arbeit am System verrichten [59].

Die Elemente der Differenzialgleichung (2.17), welche das dynamische Modell des betrachteten Systems darstellen, können auf folgende Weise berechnet werden:

$$\mathbf{H}_q(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) \quad (2.24)$$

mit $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stellt dabei die Trägheitsmatrix dar. Weiterhin bezeichnet

$$\mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}^T} \quad (2.25)$$

die Matrix der *Coriolis*- und Zentrifugalkräfte $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und

$$\mathbf{G}_q(\mathbf{q}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^T} \quad (2.26)$$

den Vektor der Gravitationskräfte $\mathbf{G}_q(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Der Einfluss der externen Kräfte bzw. Momente, bezogen auf die einzelnen Komponenten der Koordinate \mathbf{q} , kann in folgender Weise beschrieben werden:

$$\mathbf{Q}_{ext} = \mathbf{E}_q \boldsymbol{\tau}. \quad (2.27)$$

Dabei verteilt die Matrix $\mathbf{E}_q \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die externen Kräfte bzw. Momente $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ auf die bestimmten Koordinaten \mathbf{q} und formt somit den Vektor der externen Momente bzw. Kräfte des Systems \mathbf{Q}_{ext} .

Mit Einbeziehen der Bezeichnungen (2.24) bis (2.27) lautet die Differenzialgleichung des dynamischen Systems (2.17)

$$\mathbf{H}_q(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_q(\mathbf{q}) = \mathbf{E}_q \boldsymbol{\tau} + \Phi_q^T(\mathbf{q}) \lambda. \quad (2.28)$$

Um auf das dynamische Verhalten schließen zu können, sind die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ von Interesse. Jedoch stellen die Komponenten der Bindungskräfte $\lambda \in \mathbb{R}^m$ unbekannte Variablen dar. Die Gleichung der Bindungen in der Beschleunigungsebene aus (Tab. 2.1) wird daher benötigt, um das Gleichungssystem zu vervollständigen

$$\dot{\Phi}_q(q)\dot{q} + \Phi_q(q)\ddot{q} = 0. \quad (2.29)$$

Die Gleichungen (2.28) und (2.29) stellen zusammen ein Differential-algebraisches System⁷ (DAE) mit $n + m$ Unbekannten dar und können zusammengeführt werden

$$\begin{bmatrix} H_q(q) & -\Phi_q^T(q) \\ \Phi_q(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_q \tau - C_q(q, \dot{q}) - G_q(q) \\ -\Phi_q(q)\dot{q} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Das Gleichungssystem (2.30) kann als Ganzes gelöst werden

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_q(q) & -\Phi_q^T(q) \\ \Phi_q(q) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_q \tau - C_q(q, \dot{q}) - G_q(q) \\ -\Phi_q(q)\dot{q} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Alternativ können zunächst die Komponenten der Bindungskräfte λ bestimmt werden, indem \ddot{q} aus (2.28) ausgedrückt, in (2.29) eingesetzt

$$\lambda = \left(\Phi_q(q) H_q^{-1}(q) \Phi_q^T(q) \right)^{-1} \left(\Phi_q(q) H_q^{-1}(q) (C_q(q, \dot{q}) + G_q(q) - E_q \tau) - \Phi_q(q)\dot{q} \right) \quad (2.32)$$

und dann in (2.28) eingesetzt wird

$$\ddot{q} = H_q^{-1}(q) \left(E_q \tau + \Phi_q^T(q) \lambda - C_q(q, \dot{q}) - G_q(q) \right). \quad (2.33)$$

Das System (2.30) liefert die Information über das komplette dynamische Verhalten des betrachteten Systems inklusive der Bindungskräfte.

Falls die vollständige und teilweise redundante Information der $n + m$ abhängigen Variablen \ddot{q} und λ des Systems (2.30) nicht benötigt werden, gibt es die Möglichkeit, die Dynamik des Systems in unabhängigen Variablen v auszudrücken. Dazu wird zunächst die zeitliche Ableitung des Zusammenhangs der abhängigen und unabhängigen Variablen nach (2.15) benötigt

$$\ddot{q} = J_v(q)\dot{v} + J_v(q)\ddot{v}. \quad (2.34)$$

Mit Einführung der unabhängigen Koordinaten (2.15) und (2.34) in (2.28) und Multiplikation der Gleichung (2.28) mit J_v^T von der linken Seite erhält man

$$\underbrace{J_v^T H_q(q) J_v}_{H_v(v)} \ddot{v} + \underbrace{J_v^T \left(H_q(q) J_v \dot{v} + C_q(q, \dot{q}) + G_q(q) \right)}_{C_v(v, \dot{v})} = \underbrace{J_v^T E_q}_{E_v} \tau + \underbrace{J_v^T \Phi_q^T(q)}_0 \lambda, \quad (2.35)$$

bzw.

$$H_v(v) \ddot{v} + C_v(v, \dot{v}) = E_v \tau. \quad (2.36)$$

⁷ Ein Differential-algebraisches System besteht aus gewöhnlichen Differentialgleichungen mit algebraischen Nebenbedingungen.

Die Lösung nach den Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n-m}$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}_{\mathbf{v}}^{-1}(\mathbf{v})(\mathbf{E}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})), \quad (2.37)$$

enthält keine redundante Information, allerdings auch keine Information über die Bindungskräfte.

2.2 Mechanische Systeme mit diskontinuierlicher Dynamik

Anders als in Systemen mit zeitkontinuierlicher Dynamik, können einige Ereignisse nicht kontinuierlich in der Zeit auftreten, sondern diskontinuierlich, d.h. die Änderungen im System treten nicht jeden Augenblick auf, sondern nur zu gewissen zeitlichen Punkten. Beispiele für solche Dynamik bei mechanischen Systemen sind das Entstehen oder Auflösen der Kontakte zweier Körper oder eines Körpers mit seiner Umgebung.

Die in Kapitel 2.1 beschriebene Methodik ist für Systeme mit sogenannten zweiseitigen Bindungen⁸ (*bilateral constraints*) [53] beschrieben. Bei zweiseitigen Bindungen wirken die Kräfte, mit denen die Bindungsobjekte sich gegenseitig beeinflussen, in beide Richtungen. Solange keine Kräfte das Lösen der Körper bewirken, kann diese Betrachtung zutreffend sein. In manchen Systemen gibt es Kräfte, seien es äußere oder innere (Trägheitskräfte), die das Lösen von Bindungen verursachen. In solchen Fällen deckt die Betrachtung der Bindungen als zweiseitig das Verhalten des Systems nicht ab.

Es bedarf der Betrachtung einseitiger Bindungen⁹ (*unilateral constraints*). Ein wesentliches Merkmal solcher Systeme ist die Komplementarität [24] [25]:

- Der Kontakt ist *aktiv*, wenn die relative Kinematik der betrachteten Körper Null ist und die begleitende Kontaktkraft ungleich Null ist, oder
- der Kontakt ist *passiv*, wenn die relative Kinematik der betrachteten Körper ungleich Null ist und die begleitende Kontaktkraft Null ist.

Schon am Beispiel zweier Körper mit einer Kontaktmöglichkeit können daher zwei diskrete Zustände identifiziert werden. Diese können mit S_1 bezeichnet werden, wenn die Körper im aktiven Kontakt stehen bzw. mit S_0 , wenn die Körper nicht im Kontakt sind.

Bei Betrachtung der diskontinuierlichen Dynamik ist es entscheidend, die Zeitpunkte zu identifizieren, zu denen die Kontakte auftreten und unter welchen Bedingungen diese diskontinuierlichen Prozesse stattfinden.

Ein weiteres Merkmal von Systemen mit mehreren Kontakten ist die Komplexität entsprechend der Anzahl der Kontaktkonfigurationen. Eine Menge von n_c unterschiedlichen Kontaktpunkten ergibt in einem reibungslosen Fall $2^{n_c} - 1$ unterschiedliche Kontaktkonfigurationen [24]. Dies

⁸ Nach [53] kann bei zweiseitigen Bindungen das System die Bindungsflächen nach keiner Seite hin verlassen.

⁹ Gegenüber zweiseitigen Bindungen kann bei einseitigen Bindungen das System die Bindungsflächen nach einer Seite hin verlassen.

kann anhand zweier einfacher Beispiele illustriert werden (Anhang, Kapitel B.3 – *Springender Ball* und Kapitel B.4 – *Stab mit Doppelkontakt*).

Die Betrachtung der Kontaktsituationen S_i in Systemen mit $n_c > 1, n_c \in \mathbb{N}$ Multikontakten führt zu einem kombinatorischen Problem, weil jede Kombination der Kontaktkonfigurationen zu betrachten ist und mit wachsender Anzahl der Kontaktkonfigurationen exponentiell ansteigt. Die Anzahl der Kontaktsituationen S_i

$$S_i, \quad i = \{0, 1, \dots, 2^{n_c} - 1\}, \quad n_c \in \mathbb{N} \quad (2.38)$$

entspricht den Kombinationsmöglichkeiten der aktiven Kontakte

$$j = \{1, 2, \dots, n_c\}, \quad n_c \in \mathbb{N}. \quad (2.39)$$

Mit S_0 wird dabei eine kontaktlose Situation des Systems bezeichnet bzw. alle Kontakte sind passiv.

2.2.1 Kontakt

Bei Betrachtung zweier Körper mit mehreren Kontaktmöglichkeiten wird die Distanz $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_N(t)$ zwischen diesen beiden Körpern betrachtet und bewertet. Da die Körper nicht ineinander eindringen können, muss die Distanz stets größer oder gleich Null sein. Für den j -ten Kontaktpunkt gilt somit

$$g_{N,j} \geq 0. \quad (2.40)$$

Während dieser Phase haben die Körper aufeinander keine Wirkung. Die Normalkraft des j -ten Kontaktpunkts ist gleich Null

$$\lambda_j = 0 \quad (2.41)$$

und der Kontakt ist passiv. Wenn sich die Körper so weit annähern, dass die Distanz zwischen ihnen verschwindet, dann kommt es zunächst zu einem Stoß (beschrieben im Kapitel 2.2.2), wobei sich die Geschwindigkeiten in die Normalrichtung abrupt ändern. Je nach der Art der Begegnung kommt es unmittelbar danach zu einem Abprall oder zu dem Kontakt der Körper.

Bei einem vorhandenen Kontakt mindert sich die Anzahl der unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} des Gesamtsystems.

Während der Dauer des j -ten Kontakts ist die j -te Distanz Null

$$g_{N,j} = 0, \quad (2.42)$$

aber die im Kontakt stehenden Punkte der Körper wirken mit einer Normalkraft aufeinander

$$\lambda_j \geq 0. \quad (2.43)$$

Das Verschwinden der Normalkraft

$$\mathcal{C}_{E,S_i} := \lambda_j = 0 \wedge \dot{\lambda}_j < 0, \quad \mathcal{C}_{E,S_i} \in \{true, false\} \quad (2.44)$$

ist die Bedingung¹⁰ zum Auflösen des j -ten Kontaktes, der Kontakt wird passiv. Die Ungleichung (2.40) und die Gleichung (2.41) bzw. die Gleichung (2.42) und die Ungleichung (2.43) treten stets paarweise auf. Dieses System stellt eine Komplementarität (Ergänzungsprinzip) dar und kann zusammenfassend in der vektoriellen Form geschrieben werden als

$$\mathbf{g}_N \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_N \geq 0, \quad \mathbf{g}_N^T \boldsymbol{\lambda}_N = 0. \quad (2.45)$$

Daher ist sowohl die Distanz als auch die Normalkraft stets nichtnegativ und weiterhin ist das skalare Produkt dieser beiden Größen stets Null. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für mechanische Systeme mit Kontaktproblemen.

2.2.2 Stoß

Wie bereits in Kapitel 2.2.1 erwähnt, ändern sich durch den Einfluss des Stoßes die Geschwindigkeiten des Systems abrupt. Abhängig von der Eigenschaft des Stoßes prallen die Körper bei elastischen Stößen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ab oder bleiben bei nichtelastischen Stößen miteinander verbunden, d.h. sie bewegen sich mit der relativen Geschwindigkeit Null.

In der Literatur werden Stöße mit unterschiedlichen Eigenschaften behandelt. So werden z.B. in [24] und [25] der *Poissonsche* und der *Newtonsche* Stoß behandelt. Beim *Poissonschen* Stoß ist ein Energiefluss zwischen der Normal- und der Tangentialrichtung möglich, was bei bestimmten mechanischen Systemen der Realität nahe kommt. Der *Newtonsche* Stoß wird häufiger verwendet [24] und behandelt den Energiefluss nur in der normalen Richtung des Kontakts, was eine Vereinfachung darstellt.

Das Verschwinden der Distanz zum Zeitpunkt des Stoßanfangs t_A , definiert durch folgende Bedingung

$$\mathcal{I}_{A,S_i} := g_{NA,j} = 0 \wedge \dot{g}_{NA,j} < 0, \quad \mathcal{I}_{A,S_i} \in \{true, false\} \quad (2.46)$$

ist die Bedingung zum Entstehen des Kontakts, der Kontakt wird aktiv.

Der *Newtonsche* Stoß bestimmt die Geschwindigkeit in die Normalrichtung unmittelbar nach dem Stoß im diskreten Zustand S_i $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i} = \dot{\mathbf{g}}_N(t_E)$ anhand der Geschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoß $\dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i} = \dot{\mathbf{g}}_N(t_A)$ mittels

$$\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i} = -\epsilon_N \dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i}, \quad (2.47)$$

¹⁰ Die Bedingung \mathcal{C}_{E,S_i} stellt eine logische (*Boolesche*) Funktion dar, dessen Wert entweder das logische *true* („1“) oder *false* („0“) annehmen kann.

wobei $\epsilon_N = \text{diag}(\epsilon_{N,1}, \dots, \epsilon_{N,n_c})$ die Stoßzahlmatrix darstellt. Die Stoßzahl beträgt $0 \leq \epsilon_{N,j} \leq 1$, $j \in \{1, \dots, n_c\}$. Der Grenzwert $\epsilon_{N,j} = 0$ entspricht dabei einem plastischen Stoß und der Grenzwert $\epsilon_{N,j} = 1$ einem elastischem Stoß. Die Werte dazwischen beschreiben einen teilelastischen Stoß.

Die auftretenden Geschwindigkeiten in die Normalrichtung der Gleichung (2.47) stehen in Verbindung mit den Geschwindigkeiten der abhängigen Koordinaten in den Zeitpunkten des Kontaktaufangs $\dot{\mathbf{q}}_A = \dot{\mathbf{q}}(t_A)$ bzw. Kontaktendes $\dot{\mathbf{q}}_E = \dot{\mathbf{q}}(t_E)$ der Gleichung (2.28)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i} &= \Phi_{\mathbf{q},S_i} \dot{\mathbf{q}}_A, \\ \dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i} &= \Phi_{\mathbf{q},S_i} \dot{\mathbf{q}}_E.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Bei der Behandlung der Stoßdynamik wird angenommen, dass [24]:

- die Dauer des Stoßes gegenüber der Dynamik des zeitkontinuierlichen Teils sehr kurz ist,
- die Werte der Position und der Orientierung sowie nichtstoßartige Kräfte bzw. Momente des Systems konstant sind,
- die Wellenausbreitungen¹¹ nicht in Betrachtung genommen sind.

Durch die zeitliche Integration der Gleichung (2.28) über der Stoßdauer

$$\lim_{t_E \rightarrow t_A} \int_{t_A}^{t_E} (\mathbf{H}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) - \mathbf{E}_{\mathbf{q}}\boldsymbol{\tau} - \Phi_{\mathbf{q}}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}) dt = \mathbf{0}\tag{2.49}$$

wird die kontinuierliche Dynamik auf die Impulsebene gebracht

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) - \Phi_{\mathbf{q},S_i}^T \boldsymbol{\Lambda}_{N,S_i} = \mathbf{0}.\tag{2.50}$$

Die Änderungen der nichtstoßartigen Terme $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{q}}$ und $\boldsymbol{\tau}$ verschwinden dabei. Übrig bleiben der Trägheitsterm, der die Impulsänderung bildet $\mathbf{H}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A)$, und der Kraftstoßterm $\Phi_{\mathbf{q},S_i}^T \boldsymbol{\Lambda}_{N,S_i}$ der durch die Kontaktkräfte in der Normalrichtung zustande kommt.

Bei Betrachtung der Geschwindigkeitsdifferenz in Normalrichtung $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i} - \dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i}$ und Einsetzen der Werte aus (2.48) ist es möglich, die Geschwindigkeitsdifferenz der abhängigen Koordinaten $\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A$ in (2.50) einzusetzen. Daraus folgt der Kraftstoß

$$\boldsymbol{\Lambda}_{N,S_i} = (\Phi_{\mathbf{q},S_i} \mathbf{H}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})^{-1} \Phi_{\mathbf{q},S_i}^T)^{-1} (\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i} - \dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i}), \quad \boldsymbol{\Lambda}_{N,S_i} \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}\tag{2.51}$$

bzw. nach dem Einsetzen des Stoßgesetztes (2.47)

$$\boldsymbol{\Lambda}_{N,S_i} = -(\Phi_{\mathbf{q},S_i} \mathbf{H}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})^{-1} \Phi_{\mathbf{q},S_i}^T)^{-1} (\mathbf{E} + \epsilon_N) \dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i}.\tag{2.52}$$

¹¹ Nach einem Stoß breiten sich bei Behandlung kontinuierlicher Systeme Wellen in dem Körper aus.

Der Wert $(\Phi_{q,S_i} \mathbf{H}_q(\mathbf{q})^{-1} \Phi_{q,S_i}^T)^{-1}$ entspricht der reduzierten wirkenden Masse des Systems in Stoßrichtung [24]. Der Kraftstoß Λ_{N,S_i} muss physikalisch einen positiven Wert haben [24], $\Lambda_{N,S_i} \geq 0$. Da diese Beschränkung in den ausgeführten Gleichungen nicht vorkommt, muss Gleichung (2.52) auf eventuell auftretende negative Werte der Kraftstöße Λ_{N,S_i} (jedes einzelne Element) geprüft werden. Falls das j -te Element negativ ist, nimmt der j -te Kontaktpunkt nicht an der Impulsübertragung teil. Er muss daher aus dem betrachteten Fall ausgeschlossen werden und die Berechnung erneut durchgeführt werden. Diese Komplikation entsteht nur bei Systemen mit mehrfachen Kontaktpunkten. Ein Beispiel eines *Stabs mit Doppelkontakt* illustriert die Problematik (Anhang, Kapitel B.4).

Nach der Prüfung und Korrektur der Kraftstoßwerte mittels Gleichung (2.52) kann schließlich die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}_E$ nach dem Stoß anhand (2.50) ermittelt werden

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \dot{\mathbf{q}}_A + \mathbf{H}_q(\mathbf{q})^{-1} \Phi_{q,S_i}^T \Lambda_{N,S_i}. \quad (2.53)$$

Dieser Wert stellt die Anfangsgeschwindigkeit für den nächsten diskreten Zustand S_i dar. Welcher der nächsten Zustände S_i eintritt, kann anhand der Normalgeschwindigkeit nach dem Stoß $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i}$ ermittelt werden. Es besteht entweder die Möglichkeit, dass es zu einem Abprall kommt, wenn die j -te Komponente der Normalgeschwindigkeit größer als Null ist

$$\mathcal{J}_{E,S_i} := \dot{g}_{NE,j} > 0, \quad \mathcal{J}_{E,S_i} \in \{true, false\}, \quad (2.54)$$

wobei \mathcal{J}_{E,S_i} die Bedingung für den Abprall darstellt, oder die Körper bleiben verbunden und es kommt zu einem Kontakt. Dies ist mit folgender Bedingung gekennzeichnet

$$\mathcal{C}_{A,S_i} := \dot{g}_{NE,j} = 0, \quad \mathcal{C}_{A,S_i} \in \{true, false\}. \quad (2.55)$$

Wie die diskontinuierliche Dynamik in Verbindung mit der zeitkontinuierlichen Dynamik wirkt, wird im Kapitel 2.3 beschrieben.

2.3 Mechanische Systeme mit hybrider Dynamik

In den Kapiteln 2.1 und 2.2 wurden die Grundzüge der Modellbildung des zeitkontinuierlichen Teils des Systems und der Modellbildung des diskontinuierlichen Teils des Systems dargestellt. Während es bei einigen technischen Systemen ausreicht, diese Teilgeschehen zu betrachten, gibt es auch Systeme, deren Dynamik betriebsbedingt in beide Bereiche eindringt und die Wechselwirkung beider dynamischen Eigenschaften für die erwünschte Funktionalität entscheidend ist. Diese Wechselwirkung ist maßgeblich sowohl für das Verständnis des Systems als auch das Simulationsprinzip solcher Systeme.

In Abb. 2.3 ist der zeitliche Verlauf des Geschehens eines mechanischen hybriden dynamischen Systems in Realität (Zeitachse $t_{Realität}$) und das Prinzip in der Simulation (Zeitachse $t_{Simulation}$) dargestellt. Die Betrachtung beginnt im k -ten diskreten Zustand S_k . Währenddessen ist die zeitkontinuierliche Dynamik des Systems, beschrieben mit (2.30) und einer bestimmten Bindungs-

matrix $\Phi_{\mathbf{q},S_k}$ gültig. Im Zeitpunkt t_A kommt es zu einem diskreten Ereignis, wobei das mechanische System eine Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}_A$ und die Position \mathbf{q}_A hat. Bei mechanischen Systemen mit Kontaktproblemen ist es entweder ein Stoß oder ein Auflösen des Kontakts.

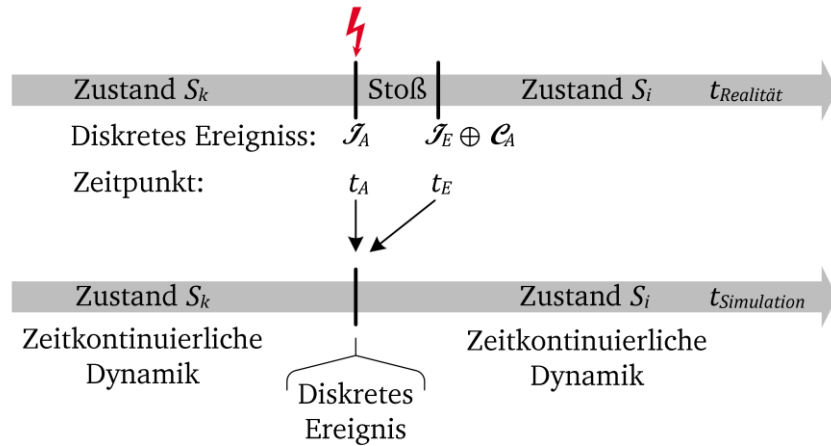


Abb. 2.3¹²: Zeitablauf der realen und idealisierten hybriden Dynamik bei einem mechanischen stoßartigen System.

Stoß. Zunächst soll der Fall des Stoßes behandelt werden. Der Stoß wird im Zeitpunkt t_A durch (2.46) \mathcal{I}_{A,S_i} indiziert. Während der Stoß in Realität eine kurze aber endliche Zeit dauert, ist in der angenommenen Modellbildung des mechanischen hybriden Systems die Dauer des Stoßes unendlich kurz. Im Zeitpunkt des Stoßes wird die Simulation daher angehalten und es beginnt die Bewertung des Stoßes. Diese beginnt (i) mit dem Ermitteln der Normalgeschwindigkeit beim Auftreten des Stoßes $\dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i}$ nach (2.48). Danach kann (ii) die Normalgeschwindigkeit nach dem Stoß $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i}$ nach (2.47) berechnet werden. Mit den vorhandenen Werten können (iii) die Kraftstöße nach (2.51) bestimmt und deren Plausibilität geprüft werden, was nur bei Multikontakten notwendig ist. Schließlich wird aus den erhaltenen Werten (iv) die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}_E$ berechnet, welche gleichzeitig die Anfangsbedingungen der zeitkontinuierlichen Dynamik im nächsten diskreten Zustand S_i bestimmt. Zusammenfassend ändert das diskrete Ereignis, gekennzeichnet in Abb. 2.3, die Geschwindigkeit des Systems von $\dot{\mathbf{q}}_A$ zu $\dot{\mathbf{q}}_E$, wobei die Positionen unverändert bleiben $\mathbf{q}_E = \mathbf{q}_A$. Welcher Zustand S_i nach dem diskreten Ereignis auftritt, ist von der Normalgeschwindigkeit nach dem Stoß $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i}$ abhängig. Ist diese größer als Null \mathcal{I}_{E,S_i} (2.54), ist der folgende Zustand erneut gleich $S_i = S_k$. Wenn die Normalgeschwindigkeit nach dem Stoß $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i}$ gleich Null ist \mathcal{C}_{A,S_i} (2.55), aktiviert sich der Kontakt und der diskrete Zustand ändert sich $S_i \neq S_k$.

Auflösen des Kontakts. Das diskrete Ereignis des Auflöserns eines Kontaktes ist einfacher als der Stoß. In Abb. 2.3 ist das Auflösen des Kontaktes nicht dargestellt, es kann jedoch am gleichen Bild als eine Zustandsänderung $S_i \neq S_k$ beschrieben werden. Die Bedingung ist bereits mit \mathcal{C}_{E,S_i} (2.44) beschrieben. Beim Auflösen des Kontaktes im Zeitpunkt t_A , welcher beim Auflösen eines Kontaktes gleich t_E ist, $t_A = t_E$, gibt es weder eine Geschwindigkeits- $\dot{\mathbf{q}}_E = \dot{\mathbf{q}}_A$ noch eine Positionsänderung $\mathbf{q}_E = \mathbf{q}_A$.

¹² Der Logikoperator \oplus bedeutet „exklusives Oder“.

Kompakte Darstellung. Während in Abb. 2.3 der zeitliche Ablauf des Verhaltens in einem hybriden dynamischen System mit Betrachtung eines diskreten Ereignisses dargestellt ist, kann das ganzheitliche Verhalten in einer kompakten Form anhand eines hybriden Zustandsautomaten (*hybrid automaton*) dargestellt werden. Der Vorteil dieser Betrachtung ist die vollständige Darstellung der unterschiedlichen diskreten Zustände und deren Interaktion, welche die hybride Dynamik kennzeichnet. Ein abstraktes Beispiel eines hybriden dynamischen Systems mit zwei diskreten Zuständen S_0 und S_1 ist in der Abb. 2.4 dargestellt.

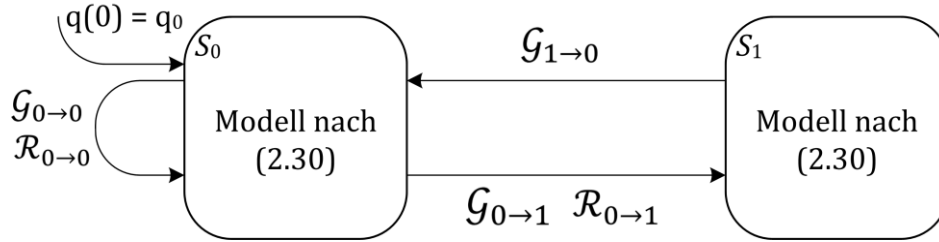


Abb. 2.4: Hybrider Zustandsautomat für ein abstraktes System mit zwei diskreten Zuständen.

Alle Zustände S_i sind mit einer bestimmten zeitkontinuierlichen Dynamik in der Form (2.30) gekennzeichnet. Diese ändert sich mit dem diskreten Zustand S_i . Am Beginn der Betrachtung, im Zeitpunkt $t = 0$, begibt sich das System mit den Anfangszuständen $\{q(0) = q_0, i(0) = 0\}$ in den diskreten Zustand S_0 . Das System behält den Zustand S_0 bis zu einem diskreten Ereignis. Entsprechend der Bedingungen in den *Guard*¹³-Funktionen $G_{0→0}$ und $G_{0→1}$ entscheidet sich der Übergang entweder zum gleichen diskreten Zustand $S_0 \rightarrow S_0$ oder zum anderen diskreten Zustand $S_0 \rightarrow S_1$.

Die *Guard*-Funktion

$$G_{k→i}(\mathbf{q}_A, \dot{\mathbf{q}}_A, k, i), \quad G \in \{true, false\}, \quad \{k, i\} \in \mathbb{N}, \quad (2.56)$$

kann nur logische Werte annehmen und ermöglicht beim Wert *true* das Verlassen des Zustands S_k und das Erreichen des Zustands S_i oder erneut des Zustands S_k . Falls bei einem Übergang die entsprechende *Guard*-Funktion ausgelassen wird, deutet es auf eine triviale *Guard*-Funktion hin, die in jedem Fall den Übergang zum nächsten Zustand S_i ermöglicht. Im Allgemeinen ist die *Guard*-Funktion aus mehreren Bedingungen der Form (2.46), (2.54) oder (2.55) zusammengesetzt.

Bei jedem Übergang in Abb. 2.4 ist auch die entsprechende *Reset*-Funktion $R_{k→i}$ aktiv, welche die zeitkontinuierlichen Variablen des Systems am Ende des diskreten Ereignisses $\{\mathbf{q}_E, \dot{\mathbf{q}}_E\}$ neu setzt.

Die *Reset*-Funktion

$$\dot{\mathbf{q}}_E = R_{k→i}(\mathbf{q}_A, \dot{\mathbf{q}}_A, k, i), \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^n, \quad \{k, i, n\} \in \mathbb{N}, \quad (2.57)$$

setzt abhängig von den Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß $\dot{\mathbf{q}}_A$ und der Lage des Systems \mathbf{q}_A beim Übergang $S_k \rightarrow S_i$ die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_E$ neu. Falls bei einem Übergang die entsprechende *Reset*-Funktion ausgelassen wird, deutet es auf eine triviale *Reset*-Funktion hin, die keine Änderung der zeitkontinuierlichen Variablen hervorruft.

¹³ Engl. *Guard* = Schutz

Das einfache Beispiel, *Springender Ball* (Anhang, Kapitel B.3), illustriert das Verhalten der hybriden Dynamik.

Analyse. Im Gegensatz zu rein zeitkontinuierlichen Systemen oder einer Dynamik, die rein auf diskreten Ereignissen basiert, weisen HDS erweiterte spezifische Phänomene auf [30]:

- Instabilität durch Wechselwirkung: es gibt Beispiele bestehend aus zwei unterschiedlichen zeitkontinuierlichen Dynamiken und zwei diskreten Zuständen, die je nach Anwendung eines bestimmten Umschaltgesetzes instabil werden können, obwohl die jeweilige zeitkontinuierliche Dynamik ein stabiles Verhalten aufweist,
- *Zeno*-Verhalten¹⁴ durch elastische Stöße, illustriert am Beispiel des springenden Balles (Anhang, Kapitel B.3),
- theoretisch unendlich schnelles Umschaltverhalten zwischen diskreten Zuständen und
- hohe Empfindlichkeit des Ablaufs in den diskreten Zuständen gegenüber kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen.

Eine der Eigenschaften, die im wesentlichen Maß das Verhalten der HDS bestimmt, ist die korrekte Stellung (*well-posedness*) des HDS¹⁵ [30]. Diese Eigenschaft bedeutet, dass das HDS nicht gesperrt bleibt (*deadlock*, nicht lösbar für einige Anfangsbedingungen) und zufallsunabhängig ist.

Die Begriffe Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Stabilität spielen eine zentrale Rolle in der Regelungstechnik [30]. Außerhalb der linearen Systemtheorie war bislang ein Verfahren für globale Steuerbarkeit schwierig zu erreichen. Bei glatten nichtlinearen Systemen gab es Resultate für lokale Steuerbarkeit, aber ein allgemeines algebraisches Verfahren im Großen erscheint unmöglich. Für einige Klassen der HDS wurde die Komplexität der Verfahrensbestimmung erforscht, mit dem Ergebnis, dass selbst für beschränkte Klassen der HDS kein Algorithmus gefunden werden konnte, um die Steuerbarkeit des betrachteten Systems zu beurteilen [30]. Daher erscheint ein allgemeines Verfahren für Steuerbarkeit der HDS unmöglich. Die Stabilität von HDS ist ein komplexes Problem [30]. Lediglich für einige Klassen der HDS wurden Methoden zur Stabilitätsanalyse anhand unterschiedlicher Arten der *Ljapunov* Funktionen entwickelt.

2.4 Exakte Linearisierung

Die exakte Linearisierung (*exact linearisation* in [49] bzw. *feedback linearization* in [48]) ist eine Methode zur Linearisierung glatter nichtlinearer Systeme. Der Vorgang ist in der Robotik unter dem Namen *computer torque method* bekannt und in der Regelung von Flugsystemen unter dem Namen *dynamic inversion* [3], [60].

Im Folgenden wird ein SISO nichtlineares System betrachtet (die Erweiterung auf MIMO Systeme wird am Beispiel des betrachteten SCD im Kapitel 5 dargestellt)

¹⁴ *Zeno*, nach dem griechischem Philosoph *Zenon* (oder *Zeno*) von *Elea*. *Zeno*-Verhalten ist ein Phänomen der dynamischen Systeme mit einer unendlich großen Anzahl der Ereignisse, die in einem unendlich kurzen Zeitabschnitt stattfinden [30].

¹⁵ Das System ist korrekt gestellt, wenn eine Lösung existiert und die Lösung eindeutig ist [30].

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.58}$$

wobei $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $x_j = x_j(t)$ den Zustandsvektor darstellt. Die Größen $u = u(t)$ und $y = y(t)$ stellen den Ein- und Ausgang dar. Die Funktionen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})]^T$ und $h(\mathbf{x})$ sind glatte Funktionen in deren Argumenten, d.h. die Komponenten dieser Funktionen sind reelle Funktionen mit bestehenden kontinuierlichen partiellen Ableitungen beliebigen Grades.

Im Gegensatz zu einer lokalen Linearisierung, welche durch die Ableitungen im Arbeitspunkt $\{\mathbf{x}_0, u_0\}$ gültig sind

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} u \right) \bigg|_{\{\mathbf{x}_0, u_0\}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{g}(\mathbf{x})|_{\{\mathbf{x}_0, u_0\}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\{\mathbf{x}_0, u_0\}}\tag{2.59}$$

und zur linearen dynamischen SISO Form führen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{x},\end{aligned}\tag{2.60}$$

wird durch die exakte Linearisierung angestrebt, das System im ganzen Betriebsbereich zu linearisieren.

Die bei der Behandlung nichtlinearer Systeme verwendete Operation der *Lie*-Ableitung $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ (Ableitung von $h(\mathbf{x})$ entlang \mathbf{f}) ist im Anhang mit (C.8) definiert. Zunächst wird der verwendete Begriff des relativen Grades eingeführt und die Koordinatentransformation beschrieben.

Relativer Grad r [49]. Das System (2.58) hat einen *relativen Grad r* (oder *Differenzenordnung* [47], [61]) im Punkt \mathbf{x}_0 , wenn

- (i) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\kappa}h(\mathbf{x}) = 0$ für alle \mathbf{x} in der Umgebung \mathbf{x}_0 und alle $\kappa < r - 1$,
- (ii) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}_0) \neq 0$.

Eine Verdeutlichung des relativen Grades r folgt aus folgender Betrachtung [49] [48]. Bei einer zeitlichen Ableitung des Systemausgangs ergibt sich $\dot{y} = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$ und danach mit Einsetzen von $\dot{\mathbf{x}}$ aus (2.58) $\dot{y} = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u$. Falls $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = 0$ gilt, dann ist \dot{y} unabhängig vom Eingang u (siehe (2.61)). Bei erneuter Ableitung des Ausgangs folgt $\ddot{y} = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$ und mit dem Einsetzen von $\dot{\mathbf{x}}$ aus (2.58) $\ddot{y} = L_{\mathbf{f}}^2h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})u$. Erneut wird geprüft, ob $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = 0$ gilt, was auf die Unabhängigkeit der \ddot{y} von u hindeutet. Diese Berechnung wird wiederholt, solange $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\kappa}h(\mathbf{x}) = 0$, $\kappa = 1, 2, \dots, r - 1$, $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}) \neq 0$ gilt. Dann sind die zeitlichen Ableitungen $y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}$ unabhängig vom Eingang u und die Ableitung $y^{(r)} = L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x})u$ abhängig von u

$$\begin{aligned}
y &= h(\mathbf{x}) \\
\dot{y} &= \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_f h(\mathbf{x}) \\
&\dots \\
y^{(r-1)} &= \frac{\partial L_f^{r-2} h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \\
y^{(r)} &= L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) u.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Bei der Bestimmung des relativen Grades können im Prinzip zwei unterschiedliche Fälle auftreten. Der relative Grad entspricht der Ordnung des Systems $r = n$ oder der relative Grad ist kleiner als die Ordnung des Systems $r < n$ [44].

In Analogie zu den linearen Systemen (2.60) bezeichnet die Ganzzahl r die Differenz zwischen der Ordnung des Nenners $\deg(\text{Den}(s)) = n$ und der Ordnung des Zählers $\deg(\text{Num}(s)) = n - r$ der Übertragungsfunktion des Systems (2.60)

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\text{Num}(s)}{\text{Den}(s)}. \tag{2.62}$$

Koordinatentransformation. Bei Betrachtung der Ableitungen aus (2.61) können zu den ersten r Funktionen von \mathbf{x}

$$\begin{aligned}
\psi_1(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}) \\
\psi_2(\mathbf{x}) &= L_f h(\mathbf{x}) \\
&\dots \\
\psi_r(\mathbf{x}) &= L_f^{r-1} h(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{2.63}$$

immer zusätzliche $n - r$ Funktionen $\psi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})$ gefunden werden, so dass die Vektorfunktion

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \psi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

eine nichtsinguläre *Jacobi*-Matrix bei \mathbf{x}_0 besitzt und somit als eine lokale Koordinatentransformation in der Umgebung von \mathbf{x}_0 geeignet ist. Zusätzlich ist es immer möglich, die Funktionen $\psi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})$ in solcher Weise zu finden, dass $L_g \psi_j(\mathbf{x}) = 0, j \in \{r+1, \dots, n\}$ gilt [49].

Mit Verwendung neuer Koordinaten $z_j = \psi_j(\mathbf{x}), j \in \{1, \dots, n\}$ kann das betrachtete System (2.58) in folgender Weise beschrieben werden [49]

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_{r-1} &= z_r \\
\dot{z}_r &= R_b(\mathbf{z}) + R_A(\mathbf{z})u \\
\dot{z}_{r+1} &= w_{r+1}(\mathbf{z}) \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= w_n(\mathbf{z})
\end{aligned} \tag{2.65}$$

mit Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
R_A(\mathbf{z}) &= L_g L_f^{r-1} h(\Psi^{-1}(\mathbf{z})), & R_b(\mathbf{z}) &= L_f^r h(\Psi^{-1}(\mathbf{z})), \\
w_j(\mathbf{z}) &= L_f \psi_j(\Psi^{-1}(\mathbf{z})), & j &\in \{1, \dots, n\}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Beim Ausgang des Systems $y = h(\mathbf{x})$ ergibt sich $y = z_1$. Die Struktur von Gleichung (2.65) des betrachteten Systems nennt sich *Normalform*.

Die Suche nach den $n - r$ Funktionen $\psi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})$ mit der Erfüllung der Bedingung $L_g \psi_j(\mathbf{x}) = 0, j \in \{r + 1, \dots, n\}$ führt zum Lösen eines Systems von $n - r$ partiellen Differentialgleichungen. Deshalb ist es einfacher, solche Funktionen $\psi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})$ zu finden, welche nur zu einer nichtsingulären *Jacobi*-Matrix der Transformationsmatrix $\Psi(\mathbf{x})$ führen. In diesem Fall haben die letzten $n - r$ Gleichungen aus (2.65) die Form mit der zusätzlichen Abhängigkeit vom Eingang u [49]

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{r+1} &= w_{r+1}(\mathbf{z}) + t_{r+1}(\mathbf{z})u \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= w_n(\mathbf{z}) + t_n(\mathbf{z})u.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

2.4.1 Linearisierung im Fall des vollen relativen Grades

Im einfacheren Fall, bei dem der relative Grad der Ordnung des betrachteten Systems entspricht ($r = n$), lautet die Koordinatentransformation (2.63) $z_j = \psi_j(\mathbf{x}) = L_f^{j-1} h(\mathbf{x}), j \in \{1, \dots, n\}$ und es bedarf keiner zusätzlichen Funktionen ψ , damit die Koordinatentransformation $\mathbf{z} = \Psi(\mathbf{x})$ vervollständigt wird. Das ursprüngliche System (2.58) kann mit der Transformation $\mathbf{z} = \Psi(\mathbf{x})$ somit in die Normalform (2.65) gebracht werden und nimmt nach der Anwendung des Regelgesetzes (für $R_A(\mathbf{z})$ und $R_b(\mathbf{z})$ siehe (2.66))

$$u = \frac{1}{R_A(\mathbf{z})} (-R_b(\mathbf{z}) + v) \tag{2.68}$$

folgende lineare und steuerbare Form [49] an

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= v.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Die Größe $v = v(t)$ stellt den neuen Systemeingang dar.

Um zum linearisierten System (2.69) zu gelangen, wurden zwei Operationen angewendet: Zunächst die Koordinatentransformation und dann das Regelgesetz nach (2.68). Man kann jedoch zum gleichen System gelangen, indem man die Reihenfolge der Operationen vertauscht [49]. Somit führt die Anwendung des Regelgesetzes in den originalen \mathbf{x} Koordinaten

$$u = \frac{1}{R_A(\mathbf{x})}(-R_b(\mathbf{x}) + v), \quad R_A(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}), \quad R_b(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x}) \tag{2.70}$$

zum gleichen System (2.69), welches hier mit der Ausgangsgröße $y = z_1$ lautet

$$y^{(n)} = v. \tag{2.71}$$

Dabei formen die Teilausdrücke R_A und R_b des linearisierenden Regelgesetzes (Zustandsreglers) die Rückführung $r(\mathbf{x})$ und die Vorsteuerung $v(\mathbf{x})$

$$r(\mathbf{x}) = -\frac{R_b(\mathbf{x})}{R_A(\mathbf{x})}, \quad v(\mathbf{x}) = \frac{1}{R_A(\mathbf{x})}. \tag{2.72}$$

Da die Ausdrücke $r(\mathbf{x})$ und $v(\mathbf{x})$ lediglich von dem Zustandsvektor \mathbf{x} und nicht von dessen zeitlichen Funktionen abhängig sind, wird diese Art des Regelgesetzes als statisches Regelgesetz benannt [49]. Das System (2.71) behält durch die Anwendung des statischen Regelgesetzes die Ordnung n bei. Bei Betrachtung in der s -Domäne zeigt das System einen n -fachen Pol im Ursprung und keine Nullstellen.

Mit einer weiteren linearen Zustandsrückführung, welche auf das lineare steuerbare System (2.71) angewendet wird, kann das System stabilisiert werden. Aus der Theorie der linearen Systeme ist bekannt, dass alle Pole des geschlossenen Regelkreises in der linken s -Halbebene sein müssen, um ein asymptotisch stabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu erreichen.

Die exakte Linearisierung im Falle des vollen relativen Grades wird auch als Eingang-Zustand¹⁶ exakte Linearisierung bezeichnet. Es sei bemerkt, dass der relative Grad des Systems von der Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ abhängig ist.

In Analogie zu den linearen Systemen entspricht ein nichtlineares System mit vollem relativen Grad $r = n$ einem linearen System ohne Nullstellen.

¹⁶ Eingang-Zustand bedeutet vom Eingang zum Zustand, wobei mit dem Zustand hier der Zustandsvektor \mathbf{x} gemeint ist.

In Beispielen einiger Systeme (einige Roboter), bei welchen eine Eingangsgröße auf jede der gekoppelten Differenzialgleichungen wirkt, kann die exakte Linearisierung auch einfacher durchgeführt werden. Andernfalls ist es notwendig, die dargestellte, allgemeine Methode zu benutzen [61].

2.4.2 Linearisierung im Fall des nicht vollen relativen Grades

Es gibt Fälle, bei denen der relative Grad für eine bestimmte Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ kleiner als die Ordnung des betrachteten Systems ist $r < n$. Es besteht die Möglichkeit, eine andere Ausgangsfunktion zu finden, welche den relativen Grad vervollständigt. Diese ist als Lösung eines im Allgemeinen komplexen Gleichungssystems partieller Differentialgleichungen und Erfüllung bestimmter Bedingungen erhältlich (Lemma 4.2.2 in [49], [61]).

Unabhängig davon besteht auch im Fall eines nicht vollständigen relativen Grades $r < n$ (aufgrund der ausgewählten Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$) die Möglichkeit einer zumindest partiellen exakten Linearisierung.

Bevor dies gezeigt wird, werden die neuen Zustandsvariablen z_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ in zwei neuen Vektoren ξ und η zusammengesetzt, wobei $\mathbf{z} = [\xi \quad \eta]^T$

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_r \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Somit kann das System (2.65) mit der allgemeineren Form der letzten $n - r$ Gleichungen (2.67) kompakter geschrieben werden

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= R_b(\xi, \eta) + R_A(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= \mathbf{w}(\xi, \eta) + \mathbf{t}(\xi, \eta)u. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Mit dem Einsetzen des Regelgesetzes u (2.68) in die Form (2.74) erhält das behandelte nichtlineare System folgende Struktur

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_{r-1} &= z_r \\
\dot{z}_r &= v \\
\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \frac{v - R_b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{R_A(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{2.75}$$

oder im Zustandsraum

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B} v \\
\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \frac{v - R_b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{R_A(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} \\
y &= \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \tag{2.77}$$

Die Struktur des Systems (2.75) besteht aus zwei Teilsystemen. Das Verhalten vom Eingang v zum Ausgang y , in [44] auch als *externe Dynamik* bezeichnet, ist mit dem linearen Teilsystem gekennzeichnet und kann mit folgender Übertragungsfunktion dargestellt werden

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^r}. \tag{2.78}$$

Das restliche im Allgemeinen nichtlineare Teilsystem der Ordnung $n - r$, ist in (2.75) mit der Gleichung $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dots$ beschrieben. Dieses Teilsystem beeinflusst den Ausgang y nicht und wird aus diesem Grund als *interne Dynamik* [47] [44] gekennzeichnet.

Das lineare Teilsystem (2.78) kann hier, wie auch im Fall des vollen relativen Grades, mit den Kenntnissen der Theorie linearer Systeme behandelt werden.

Mit dem Einführen einer zusätzlichen linearen Rückführung

$$v = \xi_s - \mathbf{K} \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_r] \tag{2.79}$$

nimmt das partiell exakt linearisierte System (2.76) folgende Form an

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\xi + \mathbf{BK} \xi_s \\
\dot{\eta} &= \mathbf{w}(\xi, \eta) + \mathbf{t}(\xi, \eta) \frac{\xi_s - \mathbf{K}\xi - R_b(\xi, \eta)}{R_A(\xi, \eta)} \\
y &= \mathbf{C} \xi
\end{aligned} \tag{2.80}$$

wobei der Skalar ξ_s einen neuen Wert, die Sollgröße, darstellt.

Das Verhalten des linearen Teilsystems (2.80) vom Eingang ξ_s zum Ausgang y wird mit der entsprechenden Auswahl der Reglermatrix \mathbf{K} so beeinflusst, dass alle Eigenwerte der zusammengesetzten Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ auf der linken Seite der komplexen s -Halbebene liegen. Damit ist ein asymptotisch stabiles Eingang-Ausgang Verhalten gewährleistet. Dies gewährleistet jedoch nicht die Stabilität der internen Dynamik, welche zwar durch den neuen Eingang ξ_s und der Zustandsvariablen ξ des linearen Teilsystems beeinflusst wird, aber nichts über die Stabilität der internen Dynamik $\dot{\eta} = \dots$ sagt, und dies auch im Fall, dass die Koordinatentransformation $\mathbf{z} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})$ so bestimmt gewesen wäre, dass die Funktion $\mathbf{t}(\xi, \eta)$ erlischt und von der internen Dynamik nur noch $\dot{\eta} = \mathbf{w}(\xi, \eta)$ übrig geblieben wäre. Schließlich gilt die Aussage, dass die interne Dynamik auch im Fall des asymptotisch stabilen linearen Teilsystems die Stabilität des ganzen Systems bestimmt. Ist die interne Dynamik stabil, so ist das ganze System (2.80) stabil, ist die interne Dynamik instabil, so ist das ganze System instabil [49] [48] [47] [44].

Im Folgenden wird das partiell exakt linearisierte System (2.80) im Fall der ausgeklungenen externen Dynamik betrachtet.

Nulldynamik. Bei Betrachtung des Ausgangs $y(t) = z_1(t)$ des linearen Teilsystems im stationären Fall führt $y(t) = 0$ zu $\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \dots = \dot{z}_r(t)$ bzw. zu $\xi(t) = \mathbf{0}$ für alle t . In diesem Fall wird die r -te Gleichung aus (2.74) zu

$$0 = R_b(\mathbf{0}, \eta) + R_A(\mathbf{0}, \eta)u \tag{2.81}$$

und daraus nach dem Einsetzen des Eingangs u

$$\dot{\eta} = \mathbf{w}(\mathbf{0}, \eta) - \mathbf{t}(\mathbf{0}, \eta) \frac{R_b(\mathbf{0}, \eta)}{R_A(\mathbf{0}, \eta)}. \tag{2.82}$$

Die Gleichung (2.82) wird als *Nulldynamik* (*zero dynamics*) bezeichnet. Diese Dynamik beschreibt das interne Verhalten des Systems, wenn die Anfangswerte und der Eingang so gewählt sind, dass der Ausgang des Systems zu Null wird.

In Analogie zu den linearen Systemen, der Form (2.62), entspricht die Nulldynamik (2.82) der Dynamik des Nenners der Übertragungsfunktion (2.62) [48], welche mit den Eigenwerten der Gleichung $\text{Num}(s) = 0$ gekennzeichnet ist. Es kann weiterhin gezeigt werden [49], dass die lineare Approximation von (2.82) bei $\eta = 0$ der Nulldynamik der linearen Approximation des betrachteten nichtlinearen Systems entspricht. Wenn die Nulldynamik (in Analogie mit linearen Systemen, die Nullstellen) eine asymptotisch stabile Ruhelage beinhaltet, dann ist das System (2.80)

minimalphasig [48]. Wenn die Nulldynamik keine asymptotisch stabile Ruhelage beinhaltet, dann ist das System (2.80) nicht minimalphasig [48]. Im Fall des vollen relativen Grades $r = n$ existiert die Nulldynamik (und somit die Variable η) nicht und das System ist standardmäßig minimalphasig.

Im Vergleich mit linearen Systemen kann die dargestellte partielle exakte Linearisierung (System (2.80)) als eine nichtlineare Version der Polvorgabe betrachtet werden, bei der r Pole in die linke komplexe s -Halbebene verschoben wurden und die restlichen $n - r$ Pole die Eigenwerte der Nulldynamik kompensieren [48].

2.4.3 Führungsverhalten

Im Kapitel 2.4.2 wurde gezeigt, wie man mit dem Einführen des linearen Reglers (2.79) ein Regelungssystem entwerfen kann, welches zum Ziel hat, die Ausgangsgröße y zu einem bestimmten Sollwert ξ_s zu regeln. Das Ziel kann allgemein auch erweitert werden, indem die Aufgabe so gestellt wird, dass auch der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ sowie deren Ableitungen $\dot{y}(t)$ bis hin zu $y^{(r)}(t)$ einer entsprechenden Solltrajektorie $\xi_s = [z_{1,s} \ z_{2,s} \ \dots \ z_{r,s}]^T$ folgen, wobei $\dot{z}_{1,s} = z_{2,s}$, $\dot{z}_{2,s} = z_{3,s}$, \dots , $\dot{z}_{r-1,s} = z_{r,s}$ gilt. Es wird dabei angenommen, dass $z_{1,s}(t)$ bis $z_{r,s}(t)$ für alle $t \geq 0$ begrenzt sind und $\dot{z}_{r,s}(t)$ eine stückweise stetige Funktion ist [48].

In diesem Unterkapitel wird der allgemeinere Fall des nicht vollen relativen Grades behandelt. Die Ergebnisse können auch auf den Fall des vollen relativen Grades angewendet werden.

Das Führungsverhalten kann nach dem Einführen einer zusätzlichen linearen Rückführung

$$v = \mathbf{K}(\xi_s - \xi) + \dot{z}_{r,s}, \quad \mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_r] \quad (2.83)$$

und Differenz der Soll- und Ist-Trajektorie

$$\mathbf{e} = \xi_s - \xi \quad (2.84)$$

analysiert werden. Mit dem Einsetzen von ξ aus (2.80) in $\dot{\mathbf{e}}$ bezüglich (2.84) und Berücksichtigung der Tatsache $\dot{\xi}_s = \mathbf{A} \xi_s + \mathbf{B} \dot{z}_{r,s}$ erhält man folgenderweise den geschlossenen Regelkreis

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e} \\ \dot{\eta} &= \mathbf{w}(\xi_s - \mathbf{e}, \eta) + \mathbf{t}(\xi_s - \mathbf{e}, \eta) \frac{\mathbf{K} \mathbf{e} + \dot{z}_{r,s} - R_b(\xi_s - \mathbf{e}, \eta)}{R_A(\xi_s - \mathbf{e}, \eta)} \\ y &= \mathbf{C}(\xi_s - \mathbf{e}). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Die erste Gleichung in (2.85) ist nur durch den Anfangswert $\mathbf{e}(0)$ angetrieben. Falls $\mathbf{e}(0) = \mathbf{0}$ und die Eigenwerte von der Matrix $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ in der linken s -Halbebene liegen, bleibt die Differenz \mathbf{e} die ganze Zeit Null. Es findet ein ideales Führungsverhalten ξ_s statt. In diesem Fall ergibt sich die Nulldynamik des Systems

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\eta}) \frac{\dot{z}_{r,s} - R_b(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\eta})}{R_A(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\eta})} \\ y &= \mathbf{C} \boldsymbol{\xi}_s.\end{aligned}\tag{2.86}$$

Die Nulldynamik (2.86) kann in der gleichen Weise analysiert werden, wie bereits bei der Nulldynamik (2.82) beschrieben.

2.4.4 Konzept der virtuellen Bindungen

Die *computed torque* Methode (entspricht der exakten Linearisierung mit einem linearen stabilisierenden Regler) ist allgegenwärtig in der Robotik [5]. Es werden Systemausgänge definiert, deren Anzahl der Anzahl der Systemeingänge entspricht und es wird ein Regler entworfen, der die Ausgänge asymptotisch zu Null führt. Dies kann zu einer asymptotischen Näherung einer Ruhelage, einer Fläche oder Trajektorie führen.

Bei dem hier beschriebenen Konzept der virtuellen Bindungen¹⁷ [5] sind die Systemausgänge als Funktionen der Lagekoordinaten definiert. Im Gegensatz zu physischen mechanischen holonomen Bindungskomponenten (Nocken, Hebel, ...) können die virtuellen Bindungen über eine Rückführung dem System aufgezwungen werden und im Betrieb umprogrammiert werden.

Es sei ein mechanisches System der Form (2.58) mit zwei Freiheitsgraden $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^T$ (Lagekoordinaten) und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}]^T$ (Lagekoordinaten und Lagegeschwindigkeiten) betrachtet. Einerseits verrichtet eine physische holonome Bindung

$$v_2 = h(v_1)\tag{2.87}$$

keine Arbeit am System. Andererseits zwingt die Regelung des Ausgangs y

$$y = v_2 - h(v_1),\tag{2.88}$$

der asymptotisch zu Null geführt wird $v_2 - h(v_1) = 0$ die virtuelle holonome Bindung dem System auf. Dadurch wird am System eine Arbeit verrichtet.

Die physische Bindung (2.87) und die virtuelle Bindung (2.88) führen asymptotisch zu einem gleichen kinematischen Verhalten, aufgrund der unterschiedlichen Energiebilanz aber zu einem unterschiedlichen dynamischen Verhalten.

Aus der Behandlung mechanischer Systeme der Form (2.58) und $\mathbf{x} = [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}]^T$ mit der Methode der exakten Linearisierung und dem Konzept der virtuellen Bindungen, d.h. mit einer Ausgangsfunktion, die nur von Lagekoordinaten und keinen Lagegeschwindigkeiten abhängig ist, folgt (Details zugänglich in [5]), dass der relative Grad mindestens zwei beträgt ($\dot{y} = L_f h(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$, $L_g h = 0$, $\ddot{y} = L_f^2 h(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) + L_g L_f h(\mathbf{v})u$). Weiterhin enthält die Entkopplungsmatrix $L_g L_f h(\mathbf{v})$ nur Variablen der Lagekonfigurationen.

¹⁷ Begriff geprägt durch [5] Carlos Canudas de Wit [77].

Als Konsequenz dieser Behandlung entsteht eine Nulldynamik zweiter Ordnung. Die niedrigere Ordnung der Nulldynamik in Bezug auf die Ordnung des betrachteten Systems vereinfacht die Analyse der Dynamik. Im Gegensatz zur Behandlung von vollaktuierten Systemen mit exakter Linearisierung, bei denen eine Ruhelage asymptotisch stabilisiert wird, können bei unteraktuierten Systemen durch Behandlung mit der exakten Linearisierung und dem Konzept der virtuellen Bindungen Bewegungstrajektorien stabilisiert werden [5].

Als Vorteil des Konzepts der virtuellen Bindung gegenüber dem Nachfahren einer Trajektorie (zeitlich definierte Kurve) wird in [5] eine erhöhte Robustheit des Systems gegenüber Störungen angegeben. Das Verhalten eines anhand virtueller Bindungen geregelten Systems enthält kein explizites Zeitverhalten, weil durch die Ausgangsfunktion eine Lagekoordinate in die Abhängigkeit einer anderen Lagekoordinate gezwungen wird. Demgegenüber ist mit dem Folgen einer zeitlich definierten Trajektorie dem System ein zeitlicher Charakter aufgezwungen. Im Fall einer vorhandenen Störung (z.B. durch variierende Bodenkontakte bei Systemen mit einseitigen Bindungen) zwingt der Regler beim Folgen einer Trajektorie das System streng an Bereiche, die möglicherweise durch Störung nicht überquerbar sind. Daraus kann unerwünschtes Systemverhalten entstehen. Mit dem Konzept der virtuellen Bindungen hingegen folgt das System bestimmten Orbits. Daher, wenn eine Koordinate im Ablauf gestört wird, folgt die davon abhängige Koordinate dieser einfach nur bis zur Störung und versucht nicht, einer zeitlich definierten Trajektorie zu folgen.

2.5 Erzeugen einer Solltrajektorie

Im Fall der vollaktuierten Systeme werden als Sollgrößen Trajektorien mit bestimmten Eigenschaften verwendet. Bezüglich der physikalischen Eigenschaften mechanisch geregelter Systeme ist als Solltrajektorie der Position ein kubisches Polynom $\xi_s(t)$ geeignet [52]. Dementsprechend ist die Geschwindigkeit $\dot{\xi}_s(t)$ eine Parabel und die Beschleunigung $\ddot{\xi}_s(t)$ eine lineare Funktion

$$\begin{aligned}\xi_s(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ \dot{\xi}_s(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\xi}_s(t) &= 2a_2 + 6a_3 t\end{aligned}\tag{2.89}$$

mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{0,1,2,3\}$. Diese Funktionen erfüllen die im Kapitel 2.4.3 gestellten Bedingungen – Begrenztheit von $\xi_s(t)$ und $\dot{\xi}_s(t)$ für alle $t \geq 0$ und stückweise Stetigkeit von $\ddot{\xi}_s(t)$.

Mit der Definition der Koeffizienten a_j kann eine konkrete Form des Polynoms bestimmt werden. Dazu wird das Polynom $\xi_s(t)$ in dem Zeitintervall $0 \leq t \leq t_E$ betrachtet. Um bestimmte Polynome zu definieren, welche der jeweiligen Anwendung entsprechen, werden bestimmte Anfangs- und Endwerte der Position $\{\xi_s(0), \xi_s(t_E)\}$ und Geschwindigkeit $\{\dot{\xi}_s(0), \dot{\xi}_s(t_E)\}$ definiert. Daraus folgen dann die Koeffizienten a_j .

Bei der Bestimmung des konkreten Polynoms durch bestimmte Koeffizienten a_j werden zwei unterschiedliche Fälle betrachtet.

Randbedingungen ohne explizite Beschleunigungsvorgabe. Die Anfangs- und Endposition werden bezeichnet mit

$$\xi_s(0) = \xi_{s,A}, \quad \xi_s(t_E) = \xi_{s,E}. \quad (2.90)$$

Die Anfangs- und Endgeschwindigkeit werden bezeichnet mit

$$\dot{\xi}_s(0) = \dot{\xi}_{s,A}, \quad \dot{\xi}_s(t_E) = \dot{\xi}_{s,E}. \quad (2.91)$$

Mit dem Einsetzen der Bedingungen (2.90) und (2.91) in die ersten beiden Gleichungen von (2.89) folgen vier Gleichungen mit vier Unbekannten, welche eindeutig lösbar sind und die Koeffizienten des Polynoms liefern

$$\begin{aligned} a_0 &= \xi_{s,A} \\ a_1 &= \dot{\xi}_{s,A} \\ a_2 &= \frac{-t_E(2\dot{\xi}_{s,A} + \dot{\xi}_{s,E}) - 3\xi_{s,A} + 3\xi_{s,E}}{t_E^2} \\ a_3 &= \frac{t_E(\dot{\xi}_{s,A} + \dot{\xi}_{s,E}) + 2\xi_{s,A} - 2\xi_{s,E}}{t_E^3}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Mit den vorgegebenen Daten $\xi_{s,A}$, $\xi_{s,E}$, $\dot{\xi}_{s,A}$, $\dot{\xi}_{s,E}$ und t_E können die Koeffizienten a_j , $j \in \{0,1,2,3\}$ bestimmt werden. Ein Beispiel mit Anfangs- und Endgeschwindigkeit Null ist in der Abb. 2.5 dargestellt. Die Größe ξ_s erhält hier als Beispiel die Einheit rad.

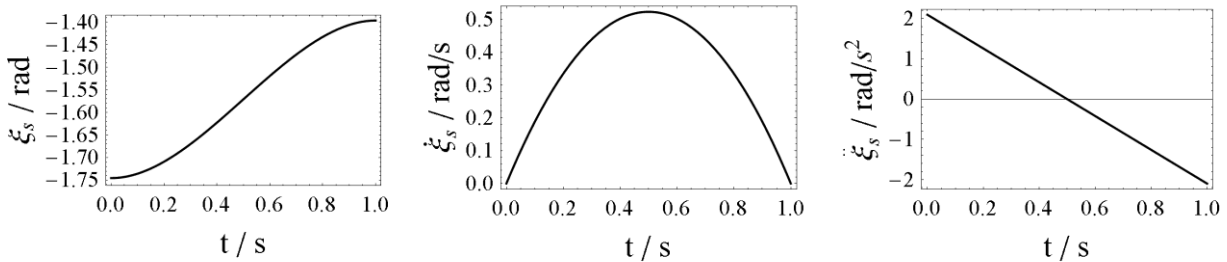


Abb. 2.5: Beispiel einer Solltrajektorie ohne explizite Vorgabe der Beschleunigung. Konkrete Werte:

$$\xi_{s,A} = -100 \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \quad \xi_{s,E} = -80 \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \quad \dot{\xi}_{s,A} = \dot{\xi}_{s,E} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad t_E = 1 \text{ s}.$$

Ein weiteres Beispiel mit Anfangsgeschwindigkeit ungleich Null ist in der Abb. 2.6 dargestellt.

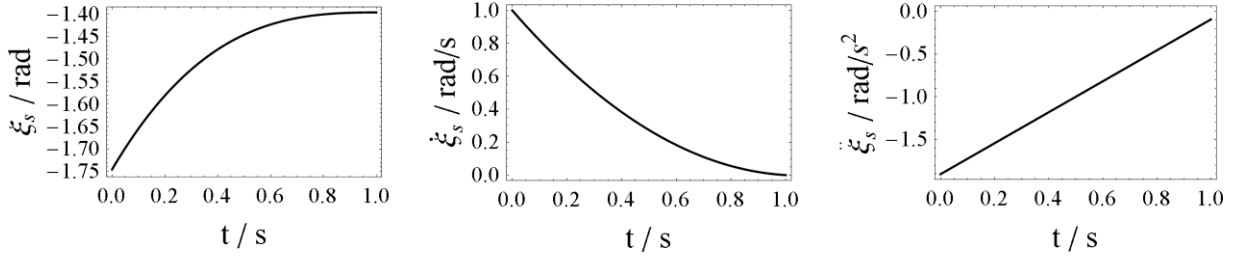


Abb. 2.6: Beispiel einer Solltrajektorie ohne explizite Vorgabe der Beschleunigung. Konkrete Werte: $\xi_{s,A} = -100 \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, $\xi_{s,E} = -80 \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, $\dot{\xi}_{s,A} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\dot{\xi}_{s,E} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $t_E = 1 \text{ s}$.

Randbedingungen mit expliziter Beschleunigungsvorgabe. Da die Beschleunigung lediglich mit einer linearen Funktion dargestellt ist, kann zusätzlich entweder die Anfangs- oder die Endbeschleunigung bestimmt werden. Als Konsequenz dessen ist das Zeitintervall t_E damit auch bestimmt. Man benötigt noch die dritte Gleichung von (2.89), die Beschleunigung $\ddot{\xi}_s(t)$. Aus dem Grund, der später in der Anwendung beschrieben wird, entschließt man sich hier, die Bedingung

$$\ddot{\xi}_s(0) = 0 \quad (2.93)$$

zu stellen, welche einen sanfteren Übergang von einer Bewegung zum Abbremsen ermöglicht.

Damit sind zusammen mit den schon definierten Bedingungen (2.90) und (2.91) anhand (2.89) fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten zu lösen, was zu den Ausdrücken der Koeffizienten und dem Zeitintervall führt

$$\begin{aligned} a_0 &= \xi_{s,A} \\ a_1 &= \dot{\xi}_{s,A} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{(\dot{\xi}_{s,A} - \dot{\xi}_{s,E})(2\xi_{s,A} + \xi_{s,E})^2}{27(\xi_{s,A} - \xi_{s,E})^2} \\ t_E &= -\frac{3(\xi_{s,A} - \xi_{s,E})}{2\dot{\xi}_{s,A} + \dot{\xi}_{s,E}}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Ein Beispiel mit gleichen Randbedingungen der Positionen und Geschwindigkeiten, wie in der Abb. 2.6 und zusätzlicher Bedingung (2.93) für die Anfangsbeschleunigung ist in der Abb. 2.7 dargestellt.

In der Annahme, dass sich die Größe $\xi_s(t)$ für $t < 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt, ist die dazugehörige Beschleunigung für $t < 0$ Null. Der Übergang in das Intervall $0 \leq t \leq t_E$ im Zeitpunkt $t = 0$ in dem hier betrachteten Fall der Abb. 2.7 entwickelt sich jetzt nicht mehr mit einer sprunghaften Beschleunigungsänderung wie in der Abb. 2.6. Dies resultiert in einem sanfteren Bewegungsablauf.

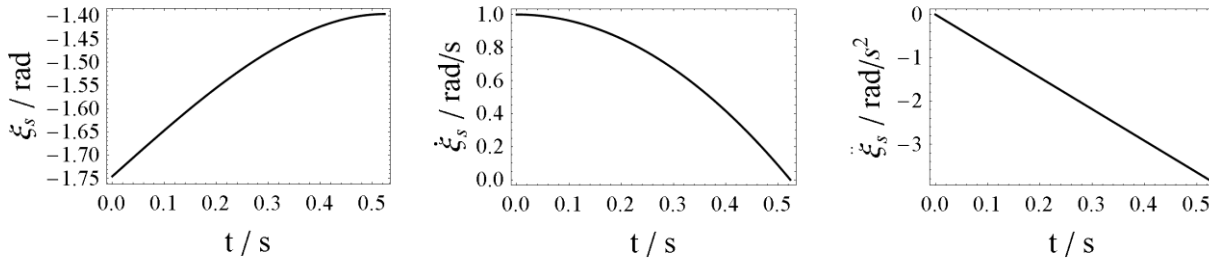


Abb. 2.7 Beispiel einer Solltrajektorie mit expliziter Vorgabe der Beschleunigung. Konkrete Werte:
 $\xi_{s,A} = -100 \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, $\xi_{s,E} = -80 \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, $\dot{\xi}_{s,A} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\dot{\xi}_{s,E} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\ddot{\xi}_s(0) = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Das Zeitintervall beträgt nach (2.94) $t_E = 0.52 \text{ s}$.

2.6 Fazit

Die dargestellten Methoden der Kapitel 2.1 bis Kapitel 2.3 stellen die Grundzüge der angewendeten Methodik zur Modellbildung und Simulation dar und werden im Kapitel 4 verwendet. Nach Definition der Geometrie des Systems und Einbeziehen der holonomen Bindungen kann die Kinematik hergeleitet werden. Zusätzliche nichtholonome Bindungen begrenzen weiterhin die Bewegung des betrachteten Systems. Mit Einbeziehen der kinetischen Eigenschaften der einzelnen Körper mittels *Lagrange I* Gleichungen folgt das dynamische Modell in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} (inkl. *Lagrangeschen* Multiplikator λ), welches nach Bedarf in das Modell mit unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} überführt werden kann. Die diskreten Ereignisse, welche als Konsequenz der Kontaktaufnahme oder des Aufhebens der Bodenkontakte entstehen, führen zu einer Strukturänderung des zeitkontinuierlichen Systems und zu nichtstetigen Geschwindigkeitsänderungen. Beide dynamischen Phänomene können zusammengefasst im Konzept eines hybriden Zustandsautomaten erfasst werden.

Die dargestellte Methode der exakten Linearisierung (Kapitel 2.4) ermöglicht im Fall des vollen relativen Grades eine vollständige Linearisierung im ganzen Arbeitsbereich. Es entspricht einer Eingang-Zustand Linearisierung ohne vorhandene interne Dynamik. Im Fall des nicht vollen relativen Grades ermöglicht eine partiell exakte Linearisierung die Eingang-Ausgang Linearisierung mit verbleibender interner Dynamik, welche die dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems prägt. Diese Methoden werden beim Reglerentwurf in Kapitel 5 verwendet.

In bestimmten diskreten Zuständen des SCD wird beim Reglerentwurf ein Führungsverhalten gefordert, wobei die Solltrajektorien nach dem Prinzip, dargestellt in Kapitel 2.5, mit einem kubischen Polynom realisiert werden.

3 Reales System

Das SCD wurde als ein elektrisch angetriebenes mechanisches System aufgebaut. Es bewegt sich innerhalb einer mechanischen Sicherungskonstruktion, welche das SCD in Fehlerfällen abfängt, damit es nicht beschädigt wird (Abb. 3.1). Die elektrischen Antriebe werden mit entsprechender Leistungselektronik betrieben. Im *Rapid Control Prototyping*¹⁸ (RCP) Echtzeitsystem von dSPACE wurden die Steuerungs- bzw. Regelungsalgorithmen implementiert. Anhand der gemessenen Sensorsignale und entworfenen Regelungsalgorithmen werden die Sollströme für die Antriebe ermittelt und somit ein Eingriff in das Verhalten des SCD ermöglicht.

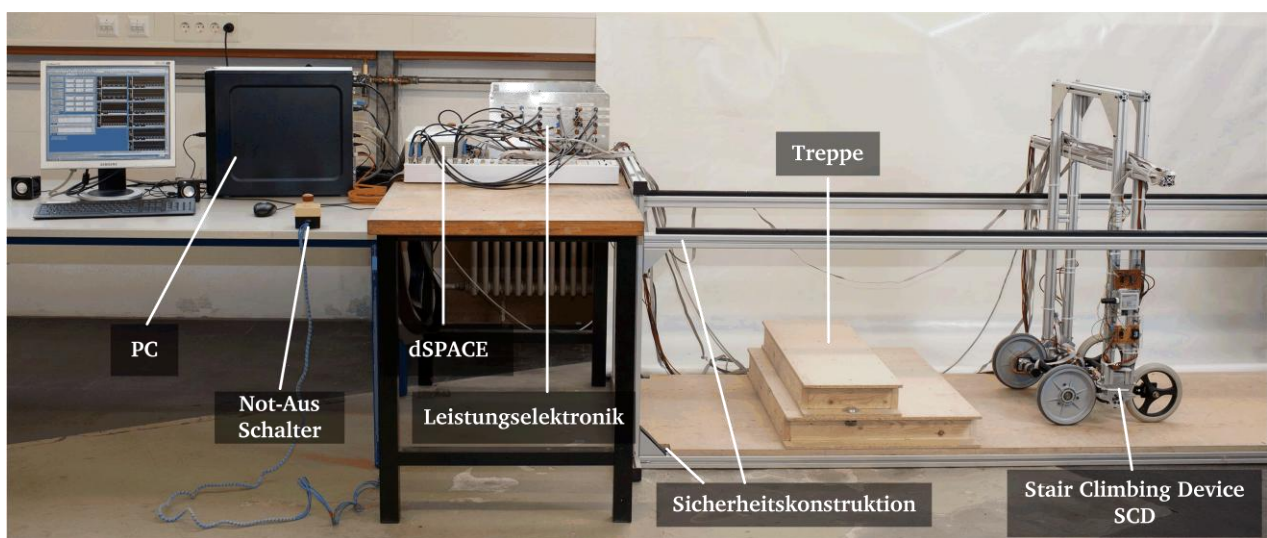


Abb. 3.1: Fotografie des SCD-Prüfstands. Abgebildet sind das SCD in einer Sicherungskonstruktion, die Treppe, PC mit dSPACE, Leistungselektronik und Not-Aus Schalter.

Auf weitere Details wird bei der Modellbildung im Kapitel 4 eingegangen, in Abb. 4.2 sind auch die wichtigen Elemente aus der Sicht der Modellbildung dargestellt. Der Zusammenhang der physischen Komponenten aus Sicht der Funktionsweise des SCD sind in Abb. 3.2 in einem Blockschaltbild vereinfacht und später in einem höherem Detailierungsgrad in Abb. 5.1 dargestellt.

Eine allgemeine Beschreibung des realen SCD sowie die Beschreibung der wichtigsten Elemente für die Funktionalität werden in folgenden Unterkapiteln gegeben. Die technischen Daten der einzelnen Komponenten und die Beschreibung der im Kapitel 3 nicht detailliert aufgeführten sonstigen Elemente sind im Anhang A gegeben.

¹⁸ Rechnergestützte Entwurfsmethode zur Steuerungs- und Regelungsentwicklung, welche zum Test am realen System verwendet wird.

3.1 Funktionsprinzip

Durch seine Autonomie und Mobilität kann das SCD als ein radbasierter Roboter betrachtet werden. Die Vorteile von radbasierten Robotern gegenüber anderen Bewegungsmechanismen wie z.B. Kettenfahrzeugen oder mehrbeinigen Robotern liegen allgemein im geringeren Energieverbrauch und einer höheren Bewegungsgeschwindigkeit [22]. Zwar besteht bei radbasierten Mechanismen eine Schwierigkeit zur Bewegung in rauem und nicht ebenem Gelände, sie eignen sich jedoch für Bewegung in für Menschen geschaffenen Umgebungen. Dabei stellen Stufen oder Treppen oft eine klare Mobilitätsgrenze dar. Das in dieser Arbeit betrachtete SCD soll mit einem geeigneten Aufbau und implementierten Funktionalitäten diese Grenzen überschreiten.

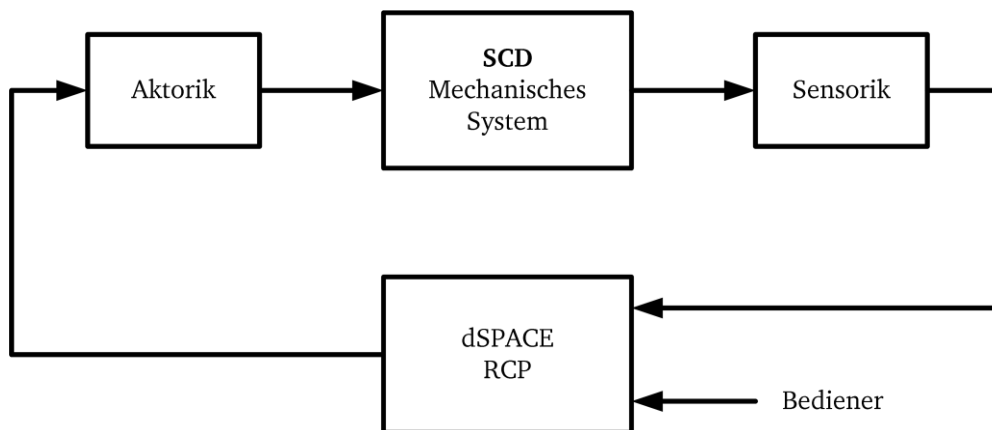


Abb. 3.2: Vereinfachtes Blockschaltbild mit den wichtigsten Komponenten des SCD-Systems. Die Leistungselektronik und die Antriebe des SCD sind in der Komponente „Aktorik“ zusammengefasst.

Wie schon im Kapitel 1.2 beschrieben, wird zur Realisierung der grundlegenden Funktionalität des treppensteigenden Gerätes mit moderaten Kosten eine einfache Konstruktion angestrebt. Um diese Anforderungen erfüllen zu können, wurde das SCD aus folgenden Komponenten aufgebaut, gekennzeichnet in Abb. 3.1 und Abb. 3.3:

- Unterkörper,
- Oberkörper,
- zwei „Hinterräder“ und zwei „Vorderräder“,
- Radantriebe für Hinterräder,
- Oberkörperantriebe,
- Sensorik,
- Leistungselektronik,
- RCP Echtzeitsystem.

Das SCD wird als ein Mehrkörpersystem behandelt. Es besteht aus idealisierten Körpern, Gelenken und Aktoren.

Die Konstruktion des SCD besteht aus dem Unterkörper und dem Oberkörper (Abb. 3.3). Der Unterkörper ist mit vier Rädern ausgestattet, die einer vorderen und hinteren Radachse zugeordnet werden. Aktuell sind nur die Räder der hinteren Radachse angetrieben. Um die mittlere Achse kann sich der Oberkörper drehen, was ebenfalls mit einem entsprechenden Antrieb beeinflusst wird.

Bezüglich des Funktionsprinzips, dargestellt in der Abb. 1.2, sind die mit dem Punkt markierten Hinterräder mit Antrieben ausgestattet. Die beiden Vorderräder sind im realen System (Abb. 3.1, Abb. 3.3) nicht angetrieben. Die Situationen (i) bis (iv) der Abb. 1.2 können dabei mit dem in dieser Arbeit dargestellten System selbständig (lediglich durch Anweisung von einem Bediener) durchgeführt werden. Die restlichen Situationen (v) bis (vii) sind mangels Aktoren an Vorderrädern nicht mehr möglich. Nach dem Erreichen der Situation (iv) und der Annahme angetriebener Vorderräder kann die Funktion der Vorder- und Hinterräder gewechselt werden. Qualitativ kann daher die Situation (iv) als ein neu beginnender Zyklus beim Treppensteigen betrachtet werden, weshalb es ausreicht, nur die Situationen von (i) bis (iv) zu realisieren.

Während der ebenen Vorwärtsbewegung fährt das SCD mit allen vier Rädern im Kontakt zum Boden, S_3 . Der Zustand mit allen vier Rädern im Kontakt zum Boden ist auch der Anfangs- sowie der Endzustand jeglicher Bewegungsart des SCD. Bei speziellen Aufgaben z.B. beim Erheben oder in begrenzten Räumen, wo bessere Wendigkeit benötigt wird, fährt das SCD auf zwei Rädern im Zustand S_1 . Dabei befindet sich das SCD im inhärent instabilen Zustand und muss durch Regelung stabilisiert werden. Beim Treppensteigen dreht sich der Unterkörper um die Mittelachse und die beiden beschriebenen Bewegungsarten wechseln sich ab. Mittels entsprechender Aktion der Aktoren kann ein Zustandsübergang von S_3 zu S_1 und umgekehrt von S_1 zu S_3 ausgelöst werden.

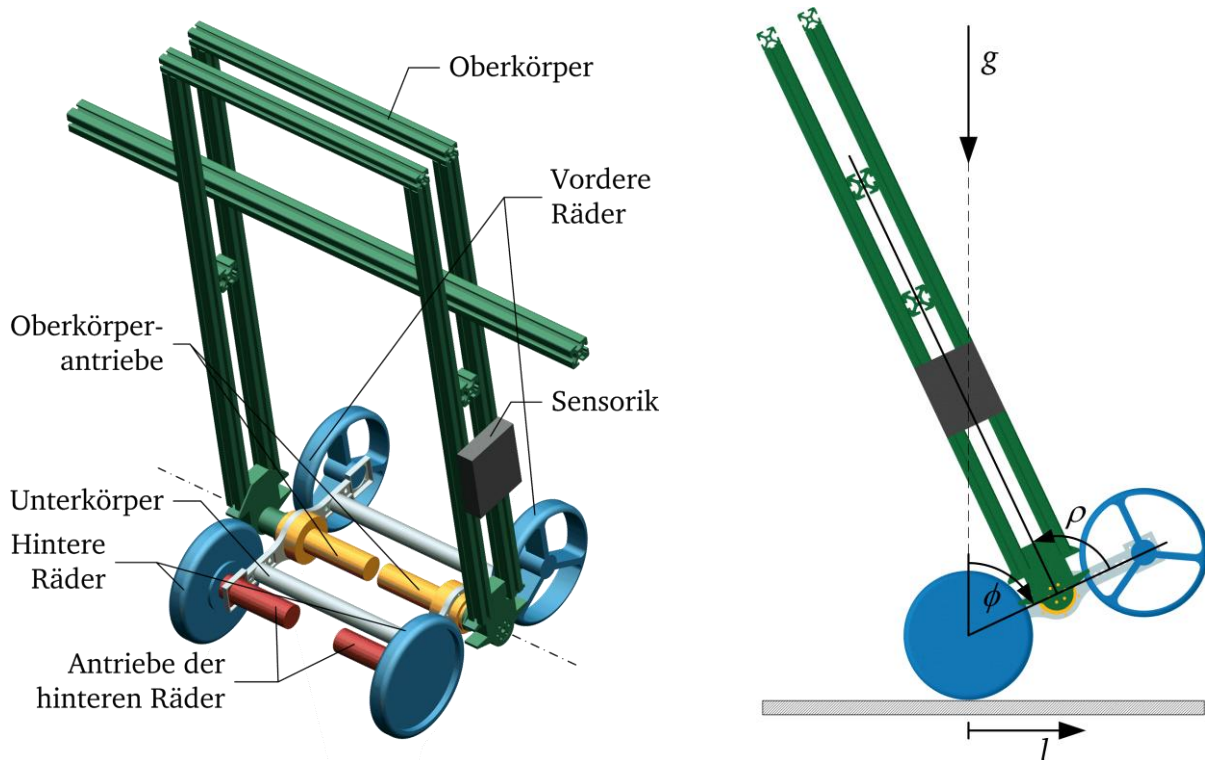


Abb. 3.3: CAD-Modell des SCD (links). Seitenansicht mit Neigungswinkel ϕ , Oberkörperwinkel ρ und Weg in der longitudinalen Richtung l (rechts).

Beim Prüfen der Machbarkeit stehen die Bewegung im inhärent instabilen Zustand S_1 sowie die Zustandsübergänge von S_3 zu S_1 und umgekehrt von S_1 zu S_3 im Focus. Das SCD ist in diesem Hinblick entworfen worden.

Wichtig bei der Bewegung des SCD ist die Reibung zwischen den Rädern und dem Boden. Die Reibkräfte ermöglichen das Rollen der Räder in longitudinaler Richtung und verhindern das

Durchrutschen der Räder in lateraler Richtung. Falls die max. Reibkraft überschritten wird, sind die Bedingungen zu den gewollten Bewegungstrajektorien nicht mehr erfüllt und das SCD nimmt ungewollte Bewegungsarten an.

Da die Räder nicht lenkbar sind, kann sich das SCD im S_3 nicht um die eigene Hochachse drehen. Obwohl diese Hinderung für alltägliche Aufgaben unbequem ist, stellt es hinsichtlich des Schwerpunkts der Machbarkeitsprüfung kein Hindernis dar. Um diese Einschränkung zu überbrücken, stehen in einer praktischen Anwendung mehrere Lösungen zur Verfügung, z.B. mittels zusätzlicher Lenkrollen, wie üblich bei Rollstühlen.

Um das Testen des Treppensteigens des SCD zu ermöglichen, wurde eine Treppengeometrie mit entsprechender Stufenhöhe δ_{st} und Auftrittsbreite D_{st} gewählt (Abb. 3.4).

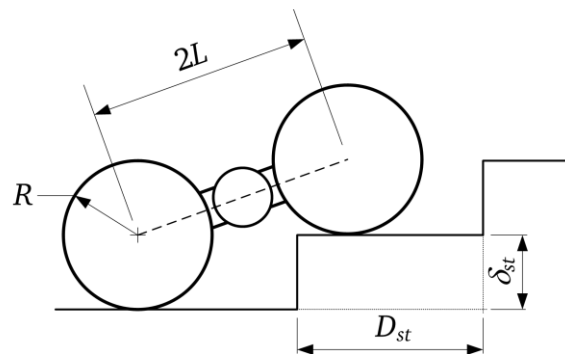


Abb. 3.4: Darstellung der Geometrie des Unterkörpers des SCD auf einer Treppe.

3.2 Konstruktion

Bei der Konstruktion waren neben den geometrischen auch weitere Bedingungen zu berücksichtigen. Insgesamt führt eine hohe Masse zur hohen Belastung des Oberkörperantriebs, weil im Zustand S_1 das gesamte Gewicht des SCD getragen wird. Ebenso steigt durch eine hohe Masse der Energiebedarf. Bei der Konstruktion des SCD wurde darauf geachtet, dass die ersten elastischen Eigenmoden gegenüber der Starrkörperdynamik so hoch sind, dass eine Starrkörperbetrachtung gerechtfertigt ist.

Der Unterkörper trägt die Radantriebe einerseits und die Oberkörperantriebe andererseits. Der Unterkörper wird durch die gesamte Masse des SCD belastet. Die Entwicklung der Konstruktion des Unterkörpers wurde mittels FEM durchgeführt. Anhand des dynamischen Modells (Kapitel 4) wurden typische Lastfälle generiert, welche bei der Entwicklung der Konstruktion berücksichtigt wurden.

Die Eigenfrequenzen der ersten elastischen Schwingungseigenmoden sowohl der Konstruktion des Oberkörpers als auch des Unterkörpers wurden analysiert und liegen im Bereich von $>35 \text{ Hz}^{19}$, was deutlich höher ist als die Dynamik der Starrkörperbewegungen.

¹⁹ Eine Ausnahme wird im Kapitel 3.3, bei Oberkörperantrieben beschrieben.

Entscheidende Parameter für das dynamische Modell des SCD sind die Trägheitsmomente. Die Konstruktion des SCD bestimmt die Trägheitsmomente. Die Parameterbestimmung wurde mittels CAD-Software durchgeführt und ist im Anhang, Kapitel A.1 zu finden.

3.3 Aktorik

Radantriebe. Die notwendigen Momente der Rad- und Oberkörperantriebe werden anhand einer Simulation des dynamischen Verhaltens ermittelt.

Für die Radantriebseinheit wird ein DC-Motor mit Permanentmagnet mit einer Leistung 150 W verwendet. Mit einem zweistufigen Planetengetriebe der Untersetzung $i_{G,wh} = 21$ wird das Motormoment zu einem Bereich von ± 3.57 Nm an der Abtriebsseite umgeformt. Das Getriebe hat ein geringes mechanisches Spiel (kleiner $3'$), was vorteilhaft aus regelungstechnischer Sicht ist. Die Schwingungsamplituden, die durch das Spiel verursacht werden, sind umso kleiner je geringer das Spiel ist. Da die gesamte Konstruktion des SCD durch das Gehäuse des Getriebes getragen wird, musste sichergestellt werden, dass die Abtriebslagerung den simulierten Belastungen Stand hält. Wichtige technische Daten für die Modellbildung sind im Anhang gegeben, Kapitel A.2.

Im Kapitel 4.1.4 wird ein Modell der Antriebe hergeleitet und es wird gezeigt, wie die Kombination der Momente bzw. elektrischen Ströme des linken und rechten Rades in longitudinal- bzw. lateralwirkende Momente transformiert werden können.

Oberkörperantriebe. Die Oberkörperantriebe (Abb. 3.3) sind mit baugleichen DC-Motoren ausgeführt. Während die Radantriebe hauptsächlich relativ geringe Momente zum Verfahren und Stabilisieren des SCD bereitstellen, werden an den Oberkörperantrieben höhere Momente benötigt. Die Oberkörperantriebe müssen die gesamte Last des SCD (Oberkörper und Unterkörper) überwinden. Ein Gleitkeilgetriebe (*harmonic drive*) mit Untersetzung $i_{G,bd} = 100$ formt das Motormoment zu einem Bereich von ± 17 Nm an der Abtriebsseite um. Ein entscheidender Vorteil des Gleitkeilgetriebes in der Anwendung beim SCD ist seine Spielfreiheit. Zusätzlich haben die Oberkörperantriebe eine elektrisch betätigte Bremse. Die Bremse wird in bestimmten sicherheitsrelevanten Situationen betätigt. Da hier, wie beim Radantrieb auch, das Gehäuse des Getriebes tragend ist, musste auch hier sichergestellt werden, dass die Abtriebslagerung den simulierten Belastungen Stand hält.

Beide Oberkörperantriebe (links und rechts) sind am realen SCD synchron betrieben, womit sich deren Wirkungen addieren. Dabei auftretende gegenphasige Schwingungen der linken und rechten Seite des Oberkörpers wurden, wie im Anhang, Kapitel A.2, beschrieben, erfolgreich gedämpft.

Leistungselektronik. Alle DC-Motoren werden mit PWM-Verstärkern betrieben. Die Verstärker zeichnen sich durch einen hohen Wirkungsgrad sowie Schutz gegen Überstrom aus. Die Ströme der Motoren werden mit in der Leistungselektronikeinheit implementierten PI-Reglern geregelt. Die Ströme der Motoren können durch Ausgänge (Monitor-Strom) erfasst werden. Ein Freigabe-

signal ermöglicht das De- bzw. Aktivieren des Verstärkers und eröffnet somit die Möglichkeit, einen spannungsfreien Zustand in Notfällen herzustellen.

3.4 Sensorik

Rad- und Oberkörperkinematik. Alle vier Antriebe (Kapitel 3.3) beinhalten inkrementelle Encoder auf der jeweiligen Motorseite des Getriebes. Die Auflösung der Encoder beträgt 500 Impulse pro Umdrehung, die durch Getriebeuntersetzung noch erhöht wird. Bei den Rädern beträgt die Auflösung somit 10500 Impulse pro Umdrehung und beim Oberkörper 50000 Impulse pro Umdrehung.

Die Auflösung der Winkelgeschwindigkeiten wird auch durch die Abtastzeit des dSPACE T_{samp} beeinflusst, da die Differenz zweier hintereinander gemessener Winkel durch die Abtastzeit dividiert wird. Dadurch ist die Auflösung umso niedriger je kleiner die Abtastzeit T_{samp} ist.

Neigung. Die Neigung des Unterkörpers ϕ bestimmt die Neigung des SCD. Sie beschreibt den Winkel des Unterkörpers in Bezug auf die Feldlinien des Gravitationsfeldes. Zusammen mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist dies die entscheidende Größe zum Stabilisieren des SCD.

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist mit einem Gyroskop (Drehratensensor), der am Gehäuse des SCD befestigt ist, erfassbar. Die Daten des Sensors sind im Anhang, Kapitel A.3 gegeben. Der Sensor ist aus praktischen Gründen am Oberkörper und nicht am Unterkörper befestigt, was die gemessene Größe durch den Oberkörperwinkel ρ beeinflusst. Dies ist kein Nachteil, weil der Oberkörperwinkel ρ durch den beschriebenen Sensor an der Oberkörperachse messbar ist und vom Ausgangssignal des Drehratensensors subtrahiert werden kann. Die Bandbreite des Gyroskops entspricht der betrachteten Dynamik des SCD. Daher folgt das Signal der gemessenen Größe $\dot{\phi}$ im Betriebsbereich. Allerdings ist das Signal mit einem temperaturabhängigen Offset beaufschlagt, so dass eine zeitliche Integration einen Drift-belasteten Unterkörperwinkel ϕ ergeben würde, was für eine genaue Regelung des SCD ungeeignet ist. Daher muss für den Winkel ϕ noch ein anderer Sensor in Anspruch genommen werden.

Ein Inklinometer (Neigungssensor) misst dazu den Neigungswinkel des SCD. Er ist ebenfalls am Oberkörper befestigt, was die gemessene Größe durch den Oberkörperwinkel ρ beeinflusst. Der Oberkörperwinkel wird ebenfalls aus dem Ausgangssignal des Neigungssensors subtrahiert. Das Wirkprinzip des Neigungssensors beruht auf der Winkelmessung zwischen dem Sensorgehäuse und einem Pendel im Inneren des Sensors. Deswegen ist das Ausgangssignal des Sensors stark von der longitudinalen Dynamik des SCD (Richtung l in der Abb. 3.3) abhängig. Die stationäre Genauigkeit des Sensors ist sehr gut, die Bandbreite jedoch nicht ausreichend.

Im Kapitel 5.1.2 wird detailliert auf das Systemverhalten des Inklinometers eingegangen. Zudem wird gezeigt, wie durch eine Sensordatenfusion die guten Eigenschaften des Gyroskops und des Inklinometers zusammengeführt werden können, um ein höherwertiges Signal der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ bzw. des Winkels ϕ zu ermitteln.

3.5 Reglerplattform

Die Algorithmen der Steuerung und Regelung werden in einem RCP von dSPACE implementiert. Dieses System ermöglicht eine schnelle Implementierung und Bewertung von entworfenen Reglern. Die technischen Daten des Systems können dem Anhang, Kapitel A.4 entnommen werden.

Hardware. Die Hardware besteht aus einer Mikroprozessor-gestützten Karte (DS1103), auf welcher der Regelalgorithmus in Echtzeit verarbeitet wird. Die Karte ist mit einem PC verbunden, wodurch der Programmcode erzeugt und auf die Karte heruntergeladen werden kann. Über den PC ist es möglich, bestimmte Parameter zu ändern, Messungen durchzuführen und aufzunehmen. Die Karte beinhaltet digitale und analoge Ein- bzw. Ausgänge, mit denen die entsprechenden Signale des Systems mit dem Regler verbunden werden können. Die Sensoren mit analogen Spannungsausgängen werden an die analogen Eingänge angeschlossen und mittels A/D-Wandlern digitalisiert. Die Drehzahlsensoren werden an die entsprechenden Eingänge für inkrementelle Encoder angeschlossen. Nach der Echtzeitverarbeitung werden die Stellgrößen nach einer D/A-Wandlung als analoge Ausgangsgrößen ausgegeben.

Software. Die Implementierung des Regelalgorithmus erfolgt automatisiert, beginnend mit der Erstellung in *Matlab/Simulink/Stateflow*, bis hin zur Erzeugung und Laden des Programmcodes in die DS1103. Der zeitkontinuierliche Teil des Regelalgorithmus ist in einer signalflossblockorientierten Weise in *Simulink* implementiert. Der Begriff zeitkontinuierlich muss hier relativiert werden, weil sich diese Signale eigentlich in zeitdiskreten äquidistanten Schritten ändern. Im Gegensatz zum zeitkontinuierlichen Teil, läuft ein Teil des Algorithmus diskontinuierlich ab, dessen Aktivität ereignisgesteuert in *Stateflow* implementiert wurde.

Zeitliche Diskretisierung. Der quasi-zeitkontinuierliche²⁰ Teil des Regelalgorithmus wurde unter der Annahme entworfen, dass die Implementierung zeitkontinuierlich erfolgt. Um die entworfenen zeitkontinuierlichen Regelungsalgorithmen in eine zeitdiskrete (quasi-zeitkontinuierliche) Form zu bringen, wird eine Transformation benötigt. Es gibt mehrere Methoden der Überführung eines zeitkontinuierlichen Reglers in eine zeitdiskrete (quasi-zeitkontinuierliche) Form [62] [63]. Im dSPACE System wird ein zeitkontinuierliches Element aus *Simulink* bei der Erstellung des echtzeitfähigen Programmcodes automatisch diskretisiert. Die Methode kann über Konfigurationsparameter in *Simulink* gewählt werden. Hier wurde die Methode `ode1` verwendet, was dem Integrationsverfahren nach *Euler* entspricht. Die Transformationsmethoden der zeitlichen Diskretisierung funktionieren, wenn die Abtastzeit ausreichend ist [62]. Das Verhalten des beim Entwurf ursprünglich als zeitkontinuierlich angenommenen Regelungssystems nähert sich dem Verhalten des quasi-zeitkontinuierlichen Regelungssystem mit Verkürzung der Abtastzeit [63]. Die Abtastzeit wurde als Kompromiss unterschiedlicher Kriterien gewählt:

²⁰ Auf das Wort „quasi“ wird außerhalb von diesen Absatz in Bezug auf zeitkontinuierliche Dynamik aus Bequemlichkeitsgründen verzichtet.

- Für eine höhere Auflösung der Signale von inkrementellen Encodern, wie in Kapitel 3.4 beschrieben, ist eine längere Abtastzeit T_{samp} erforderlich,
- um den Frequenzbereich der relevanten Systemdynamik zuverlässig regeln zu können, muss eine ausreichend hohe Abtastfrequenz bzw. kurze Abtastzeit T_{samp} eingestellt werden.

Ein zufriedenstellender Kompromiss wurde mit $T_{samp} = 5$ ms gefunden. Die Berechnungszeit des gesamten Algorithmus kann durch die von dSPACE zur Verfügung gestellte `TurnAroundTime` beobachtet werden. Diese betrug bei dem hier angewandten Algorithmus maximal 250 μ s, was ca. 5% der gewählten Abtastzeit entspricht. Da diese Berechnungszeit nur einen Bruchteil der Abtastzeit beträgt, ist die Verfälschung der ursprünglich als zeitkontinuierlich entworfenen Eigenschaften des Regelungssystems klein.

Um hochfrequente Störungseinflüsse zu unterdrücken, die sich durch das zeitdiskrete Abtasten in dem niederfrequenten Bereich abbilden, werden die Sensorsignale analog mit einem RC-Glied tiefpassgefiltert, bevor sie als analoge Eingänge in das dSPACE eingeführt werden. Die Zeitkonstante dieses *antialiasing* Filters, wird mit Berücksichtigung des Satzes von *Nyquist-Shannon* bestimmt.

3.6 Fazit

Das SCD wurde als ein elektrisch angetriebenes mechanisches System aufgebaut, welches die Machbarkeit der grundlegenden Funktionalität in der Praxis ermöglicht. Im vorhandenen Entwicklungsstand kann es aufgrund mangelnder Aktoren an den Vorderrädern nur eine Stufe steigen, was aber für den Nachweis des Treppensteigens ausreichend ist. Die eingebauten (inneren) Sensoren ermöglichen das Ermitteln aller zur Regelung notwendigen Größen. Im vorhandenen Entwicklungsstand sind keine Sensoren zur Erfassung der SCD-Umgebung implementiert, so dass notwendige Informationen (z.B. Stufen- oder Bodennähe) aus den inneren Sensordaten und bestimmten Annahmen zu ermitteln sind. Dies stellt ebenfalls kein Hindernis für den Nachweis des Treppensteigens dar. Das verwendete Echtzeitsystem ermöglicht das schnelle Implementieren und Testen der angedachten Steuerungs- bzw. Regelungsmethoden.

4 Modellbildung

„Die Modellbildung ist ein Prozess der Vereinfachung, Abstraktion und Approximation der objektiven Welt in der logischen Erkenntnis“ [64]. Im Gegensatz zur experimentellen Untersuchung kann eine modellbasierte Untersuchung in folgenden Situationen Vorteile erbringen [65]: die Kosten des Experiments sind zu hoch, das Experiment ist zu gefährlich, das zu betrachtende System existiert noch nicht. Modelle sollten so komplex wie nötig sein, um die Realität gut abzubilden, aber so einfach wie möglich, um den Aufwand klein zu halten [25].

Das Modell des SCD in abhängigen Koordinaten wird für die Analyse des dynamischen Verhaltens und Simulation benötigt. Weiterhin dient es als Ausgangspunkt für die Herleitung des Modells in unabhängigen Koordinaten, welches für den Reglerentwurf benötigt wird.

Bei einem Treppengang, wie in Abb. 1.2 gezeigt, werden unterschiedliche Situationen des SCD durchlaufen. Dabei unterscheiden sich einige Situationen qualitativ nur unwesentlich – so besteht z.B. der Unterschied zwischen Situation (ii) und Situation (iii) in Abb. 1.2 nur im Winkel des Oberkörpers und Unterkörpers, ansonsten hat das SCD in beiden Situationen nur über eine Radachse Kontakt mit dem Boden. Die zeitkontinuierliche Dynamik ist qualitativ gleich. Im Rahmen dieser Arbeit werden wesentlich unterschiedliche Situationen hervorgehoben, und es wird gezeigt, dass es bei der Modellierung ausreichend ist, das SCD in vier diskreten Zuständen zu betrachten, um die grundlegende Funktionalität zu entwerfen. Die vier diskreten Zustände sind in Abb. 4.1 mit S_i , $i \in \{0,1,2,3\}$, gekennzeichnet.

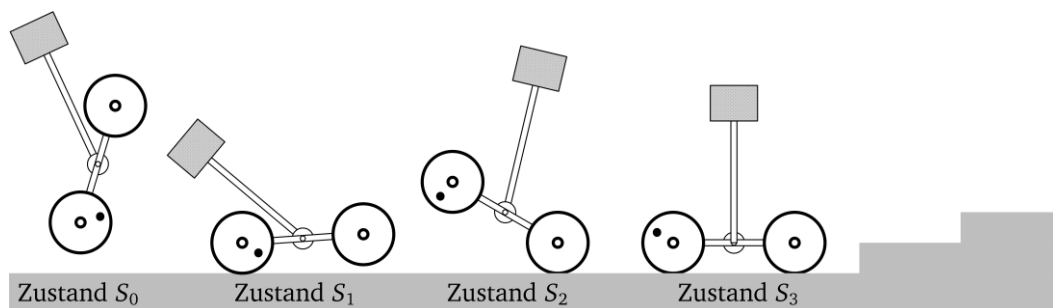


Abb. 4.1: Darstellung der vier charakteristischen diskreten Zustände des SCD. Der Punkt markiert die Hinterräder.

Diese vier diskreten Zustände werden in folgender Weise beschrieben:

- diskreter Zustand S_0 , SCD ohne Bodenkontakt,
- diskreter Zustand S_1 , SCD mit der hinteren Radachse im Kontakt mit dem Boden,
- diskreter Zustand S_2 , SCD mit der vorderen Radachse im Kontakt mit dem Boden,
- diskreter Zustand S_3 , SCD mit beiden Radachsen im Kontakt mit dem Boden.

Es ist offensichtlich, dass es sich beim SCD um ein System mit hybrider Dynamik handelt. Daher benötigt es eine Modellierung der zeitkontinuierlichen Dynamik sowie der diskreten Ereignisse

und der Erstellung eines hybriden Modells. Diese Vorgehensweise wird in den nächsten Unterkapiteln verfolgt und beschrieben.

Außer den schon erwähnten diskreten Zuständen gibt es in der Realität auch andere denkbare Situationen, bei denen eine diskontinuierliche Dynamik ausgelöst werden kann, die aber in der hier behandelten Dynamik nicht in Betracht gezogen wurden. Denkbar wären z.B. ein Auffahren gegen eine Setzstufe oder gegen eine Wand bei der longitudinalen²¹ Bewegung oder ein Bodenkontakt mit nur einem statt beiden Rädern einer Radachse. Die Behandlung solcher Situationen würde den Umfang des Modells mit steigender Anzahl möglicher Situationen rasant wachsen lassen. Da solche Situationen im Gegensatz zu den vorher erwähnten vier diskreten Zuständen nicht in der Grundfunktionalität inbegriffen sind, werden diese hier nicht behandelt.

Die diskreten Zustände S_0 und S_2 sollen beim Treppensteigen des betrachteten SCD nicht auftreten, werden aber trotzdem modelliert. Ein Grund dafür ist, dass diese Zustände die kombinatorische Menge aller möglichen Zustände anhand zweier Kontaktpunkte vervollständigen. Der wichtigere Grund ist, dass diese Zustände in der vorhandenen Entwicklungsstufe nicht erwünscht sind und daher im Betrieb vermieden werden müssen. Um dies in Simulationen prüfen zu können, ist es notwendig, diese Zustände zu untersuchen. Es ist möglich, dass bei dynamischeren Vorgängen die Zustände S_0 und S_2 auftreten können. Beim Reglerentwurf muss die auftretende zeitkontinuierliche Dynamik des geregelten Systems auf Gegeneinfluss zur diskreten Dynamik geprüft werden.

4.1 Zeitkontinuierliche Dynamik

4.1.1 Geometrie

Die Geometrie des SCD ist vollständig durch die Position und die Orientierung aller seiner Körper beschrieben. Alle notwendigen Bezeichnungen sind diesbezüglich in Abb. 4.2 dargestellt.

Koordinatensysteme. Alle verwendeten Koordinatensysteme sind kartesisch und die Koordinatenachsen sind mit x, y und z bezeichnet²² (Abb. 4.2). Das absolute raumfeste Koordinatensystem ist mit K_a bezeichnet. Im Zentrum der Hinterraddrehachse ist der Ursprung des Koordinatensystems K_b mit dem Punkt b bezeichnet. Das Koordinatensystem K_b dreht sich nicht um die $^b y$ -Achse, die z -Achsen von K_a und K_b sind stets parallel $^a z \parallel ^b z$. Zudem sind die z -Achsen von K_a und K_b parallel mit den Gravitationslinien der Erdbeschleunigung $^a z \parallel ^b z \parallel g$. Die körpereigenen Koordinatensysteme des Unterkörpers und des Oberkörpers sind jeweils mit K_c (Ursprung c im Massenzentrum) beziehungsweise mit K_e (Ursprung e im Massenzentrum) bezeichnet. Das Koordinatensystem K_d ist mit dem Unterkörper befestigt, wobei der Ursprung d auf der Vorderraddrehachse liegt.

Die wichtigsten geometrischen Größen sind: die halbe Spurweite B_w , der Radradius R , die Abstände der Drehachse zum Massenzentrum des Unterkörper bzw. des Oberkörpers L und H .

²¹ Die longitudinale und die laterale Geschwindigkeitsrichtung des SCD sind in Abb. 4.3 eingezeichnet.

²² Die Konvention zur Bezeichnung der Koordinatenachsen wurde in Kapitel 2.1.1 beschrieben.

$${}^a\bar{\mathbf{r}}_b = \begin{bmatrix} {}^ax_b \\ {}^ay_b \\ {}^az_b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^a\bar{\mathbf{r}}_{l,b} = \begin{bmatrix} {}^ax_b - B_w \sin(\Theta) \\ {}^ay_b + B_w \cos(\Theta) \\ {}^az_b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^a\bar{\mathbf{r}}_{r,b} = \begin{bmatrix} {}^ax_b + B_w \sin(\Theta) \\ {}^ay_b - B_w \cos(\Theta) \\ {}^az_b \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Betrachtung im Koordinatensystem K_c . Zuerst wird die Transformationsmatrix von K_c zu K_b hergeleitet

$${}^b\mathbf{T}_c = \text{Rot}_y(\phi) \text{Tran}(0,0,L) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & L\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & L\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Danach ist es möglich, die Transformationsmatrix ${}^a\mathbf{T}_c$ von K_c zu K_a herzuleiten (Anhang, (B.19)). Mit der Transformationsmatrix ${}^a\mathbf{T}_c$ ist die Darstellung der Elemente möglich die in K_c definiert sind. Der Punkt c stellt das Massenzentrum des Unterkörpers dar. Die Position des Massenzentrums des Unterkörpers ${}^c\bar{\mathbf{r}}_c$

$${}^c\bar{\mathbf{r}}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

beträgt durch Transformation ${}^a\bar{\mathbf{r}}_c = {}^a\mathbf{T}_c {}^c\bar{\mathbf{r}}_c$ im K_a

$${}^a\bar{\mathbf{r}}_c = \begin{bmatrix} {}^ax_b + L\cos(\Theta)\sin(\phi) \\ {}^ay_b + L\sin(\Theta)\sin(\phi) \\ {}^az_b + L\cos(\phi) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Betrachtung im Koordinatensystem K_d . Das Koordinatensystem K_d unterscheidet sich vom K_c nur durch die Translation um eine weitere Länge L . Daher gilt

$${}^b\mathbf{T}_d = \text{Rot}_y(\phi) \text{Tran}(0,0,2L) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 2L\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 2L\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Danach ist es möglich, die Transformationsmatrix ${}^a\mathbf{T}_d$ von K_d zu K_a herzuleiten (Anhang, (B.20)). Im K_d sind die Positionen der Vorderräder definiert. Die Position des linken ${}^b\bar{\mathbf{r}}_l$ und rechten Rades ${}^b\bar{\mathbf{r}}_r$ beträgt im K_d

$${}^d\bar{\mathbf{r}}_{l,d} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^d\bar{\mathbf{r}}_{r,d} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

und in K_a durch Transformation ${}^a\bar{\mathbf{r}}_{l,d} = {}^a\mathbf{T}_d {}^d\bar{\mathbf{r}}_{l,d}$ und ${}^a\bar{\mathbf{r}}_{r,d} = {}^a\mathbf{T}_d {}^d\bar{\mathbf{r}}_{r,d}$

$$\begin{aligned}
{}^a\bar{\mathbf{r}}_{l,d} &= \begin{bmatrix} {}^ax_b - B_w \sin(\Theta) + 2L \cos(\Theta) \sin(\phi) \\ {}^ay_b + B_w \cos(\Theta) + 2L \sin(\Theta) \sin(\phi) \\ {}^az_b + 2L \cos(\phi) \\ 1 \end{bmatrix}, \\
{}^a\bar{\mathbf{r}}_{r,d} &= \begin{bmatrix} {}^ax_b + B_w \sin(\Theta) + 2L \cos(\Theta) \sin(\phi) \\ {}^ay_b - B_w \cos(\Theta) + 2L \sin(\Theta) \sin(\phi) \\ {}^az_b + 2L \cos(\phi) \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Betrachtung im Koordinatensystem K_e . Das Koordinatensystem K_e ist an den Oberkörper des SCD gebunden. Gegenüber dem Koordinatensystem K_c ist der Ausgangspunkt von K_e verschoben entlang der z-Achse um die Länge H und die Rotation um die y-Achse um den Winkel ρ

$${}^c\mathbf{T}_e = \text{Rot}_y(\rho) \text{Tran}(0,0,H) = \begin{bmatrix} \cos(\rho) & 0 & \sin(\rho) & H\sin(\rho) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\rho) & 0 & \cos(\rho) & H\cos(\rho) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Mit Einbezug der Transformationsmatrix ${}^a\mathbf{T}_c$ (B.19) kann die Transformationsmatrix ${}^a\mathbf{T}_e$ von K_e zu K_a hergeleitet werden (Anhang, (B.21)). Die Position des Massenzentrums des Oberkörpers ${}^e\bar{\mathbf{r}}_e$

$${}^e\bar{\mathbf{r}}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

beträgt durch Transformation ${}^a\bar{\mathbf{r}}_e = {}^a\mathbf{T}_e {}^e\bar{\mathbf{r}}_e$ im K_a

$${}^a\bar{\mathbf{r}}_e = \begin{bmatrix} {}^ax_b + \cos(\Theta)(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) \\ {}^ay_b + \sin(\Theta)(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) \\ {}^az_b + H\cos(\rho + \phi) + L\cos(\phi) \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Abhängige Koordinaten \mathbf{q} . Mittels entsprechender Transformationen (4.1), (B.19), (B.20) und (B.21) ist es möglich, alle Elemente des SCD im absoluten Koordinatensystem K_a zu beschreiben. Dies wird in nächsten Schritten der Modellbildung zur Bestimmung der Bindungen und kinetischen Energien benötigt.

Abschließend ist es möglich, den Vektor in generalisierten abhängigen Koordinaten \mathbf{q} zu definieren

$$\mathbf{q} = [{}^ax_b \quad {}^ay_b \quad {}^az_b \quad \alpha_{l,b} \quad \alpha_{r,b} \quad \phi \quad \rho]^T. \tag{4.13}$$

Der Vektor $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ enthält, je nach diskreter Situation, abhängige Koordinaten des SCD. Die Komponenten bestimmen jederzeit vollständig die Position und Orientierung des SCD. Der Vektor \mathbf{q} enthält sowohl kartesische als auch generalisierte Koordinaten.

4.1.2 Kinematik

Im Modell des SCD sind die Translations- und Drehgeschwindigkeiten der Körper entscheidend für die Dynamik. Zudem ist es erst bei Betrachtung der Geschwindigkeiten möglich, die im System auftretenden nichtholonomen Bindungen zu definieren. Die auftretenden Geschwindigkeiten werden mittels zeitlicher Ableitungen aus den Positionen der entsprechenden Elemente (hergeleitet in Kapitel 4.1.1) bestimmt.

Zunächst werden die Translationsgeschwindigkeiten folgender Körper bestimmt: Oberkörper ${}^a\dot{\mathbf{r}}_e$, Unterkörper ${}^a\dot{\mathbf{r}}_c$, Hinterräder – links ${}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,b}$ und rechts ${}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,b}$ und Vorderräder – links ${}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,d}$ und rechts ${}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,d}$. Diese Ausdrücke werden als zeitliche Ableitungen hergeleitet und sind im Anhang dargestellt (Gleichungen (B.22) bis (B.26)).

Die Bewegungen des Unterkörpers c sowie des Oberkörpers e sind entscheidend für die Dynamik des SCD. Deren Drehgeschwindigkeiten ${}^c\boldsymbol{\omega}_c$ beziehungsweise ${}^e\boldsymbol{\omega}_e$ werden nach den Ausdrücken (2.10) bis (2.12) unter Einbezug der Rotationstransformationen aus (B.19) bzw. (B.21) bestimmt

$${}^c\boldsymbol{\omega}_c = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin(\phi) \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad {}^e\boldsymbol{\omega}_e = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin(\rho + \phi) \\ \dot{\rho} + \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\cos(\rho + \phi) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Die Ausgangssignale der Radsensoren $\dot{\alpha}_{l,b}$ und $\dot{\alpha}_{r,b}$ sind mit zwei physikalischen Größen beaufschlagt:

- Winkelgeschwindigkeit des Rades um die ${}^b y$ -Achse, $\dot{\Omega}_{i,b}$, $i \in \{l, r\}$ und
- Winkelgeschwindigkeit des Unterkörpers um die ${}^b y$ -Achse, $\dot{\phi}$.

Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass das Gehäuse des Sensors kinematisch mit dem Unterkörper verbunden ist und die Welle des Sensors mit dem jeweiligen Rad.

Die Winkelgeschwindigkeiten der Räder $\dot{\Omega}_{i,b}$, $i \in \{l, r\}$ können daher bezüglich der Bezeichnungen in Abb. 4.2 durch die Größen $\dot{\phi}$ und $\dot{\alpha}_{i,b}$ beschrieben werden

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{l,b} &= \dot{\alpha}_{l,b} + \dot{\phi} \\ \dot{\Omega}_{r,b} &= \dot{\alpha}_{r,b} + \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.1.3 Bindungen

Bei der Bewegung des SCD stellt der Boden die Grenze des Raumes dar. Einerseits kann das SCD nicht in den Boden eindringen und andererseits sind durch den Bodenkontakt nur bestimmte Bewegungsformen entlang des Bodens möglich, welche durch die Radkinematik bestimmt sind. Diese Begrenzungen der Mobilität werden durch Bindungen beschrieben. Als Konsequenz dieser Beziehungen werden einige der Variablen des Vektors \mathbf{q} abhängig voneinander. Beim Einbeziehen der Kinetik in das dynamische Verhalten des SCD werden aus Bindungen Kräfte hergeleitet, die für das Erfüllen der jeweiligen Bindungen verantwortlich sind.

In der Realität treten Kontaktkräfte als Folge eines lokalen Schlupfes auf, es kann jedoch gezeigt werden, dass diese Schlupfeffekte eine hohe Dynamik gegenüber der Globalbewegung des Fahrzeugs aufweisen. Deshalb können diese Effekte vernachlässigt werden, vor allem für den Reglerentwurf [22].

Es werden vier unterschiedliche diskrete Zustände beim SCD behandelt S_i , $i \in \{0, \dots, 3\}$. Abhängig vom diskreten Zustand S_i entstehen unterschiedliche Bindungen. Im Weiteren werden diese Bindungen der Reihe nach in betrachteten diskreten Zuständen beschrieben.

Diskreter Zustand S_0 . Das SCD bewegt sich frei im Raum und es liegen keine Begrenzungen vor. In diesem Zustand unterliegt das SCD vorwiegend der Wirkung der Gravitation, aber auch Akto- ren zwischen bestimmten Körpern des Systems können Kräfte auf das System ausüben.

Im diskreten Zustand S_0 gibt es keine Bindungen. Vollständigkeitshalber wird er an dieser Stelle jedoch behandelt. Die Matrix der kinematischen Bindungen $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ kann formal ohne Einträge definiert werden

$$\Phi_{\mathbf{q},S_0} = [\emptyset], \quad \Phi_{\mathbf{q},S_0} \in \mathbb{R}^{0 \times 0} \quad (4.16)$$

Alle Variablen des Zustandsvektors \mathbf{q} (4.13) sind unabhängig voneinander. Die Matrix der kinematischen Verhältnisse der (formal) abhängigen Koordinaten in \mathbf{q} und unabhängigen Koordinaten in \mathbf{v}_{S_0} wird zu Einheitsmatrix \mathbf{E}

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_0} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v},S_0} \in \mathbb{R}^{7 \times 7} \quad (4.17)$$

Daher gilt

$$\mathbf{q} = \mathbf{v}_{S_0} = [{}^a x_b \quad {}^a y_b \quad {}^a z_b \quad \alpha_{l,b} \quad \alpha_{r,b} \quad \phi \quad \rho]^T. \quad (4.18)$$

Diskreter Zustand S_1 . Das SCD bewegt sich auf den Hinterrädern entlang des Bodens. Diese Räder sind angetrieben und ermöglichen eine Bewegung des SCD in die longitudinale Richtung („vorwärts-rückwärts“) und das Drehen des SCD um die eigene Achse, aber keine laterale Bewegung.

Die Geschwindigkeit des linken Rades in die longitudinale $v_{long,lb}$ und laterale Richtung $v_{lat,lb}$ beträgt entsprechend Abb. 4.3

$$\begin{aligned} v_{long,lb} &= {}^a \dot{x}_{l,b} \cos \Theta + {}^a \dot{y}_{l,b} \sin \Theta \\ v_{lat,lb} &= {}^a \dot{x}_{l,b} \sin \Theta - {}^a \dot{y}_{l,b} \cos \Theta \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nach dem Einsetzen der kartesischen Geschwindigkeiten des linken Rades in die ${}^a x$ - und ${}^a y$ -Richtung des Vektors ${}^a \dot{\mathbf{r}}_{l,b}$ aus Anhang (B.22), können die Geschwindigkeiten $v_{long,lb}$ und $v_{lat,lb}$ in den Komponenten des abhängigen Vektors, ${}^a \dot{x}_b$, ${}^a \dot{y}_b$ und Θ bestimmt werden

$$\begin{aligned}
v_{long,lb} &= {}^a\dot{x}_b \cos \Theta + {}^a\dot{y}_b \sin \Theta - B_w \dot{\Theta} \\
v_{lat,lb} &= {}^a\dot{x}_b \sin \Theta - {}^a\dot{y}_b \cos \Theta.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Analog der Beziehungen für das linke Rad können die longitudinale und laterale Geschwindigkeit des rechten Rades bestimmt werden

$$\begin{aligned}
v_{long,rb} &= {}^a\dot{x}_b \cos \Theta + {}^a\dot{y}_b \sin \Theta + B_w \dot{\Theta} \\
v_{lat,rb} &= {}^a\dot{x}_b \sin \Theta - {}^a\dot{y}_b \cos \Theta.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Nachdem die Geschwindigkeiten beschrieben worden sind, ist es möglich, die Bindungen zu definieren. Die nichtholonome Bindung, die eine laterale Bewegung des SCD verhindert, $v_{lat,lb} = v_{lat,rb} = 0$

$$\dot{\Phi}_{S_{1,1}} = \frac{\partial \Phi_{S_{1,1}}}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} = \sin \Theta {}^a\dot{x}_b - \cos \Theta {}^a\dot{y}_b = 0. \tag{4.22}$$

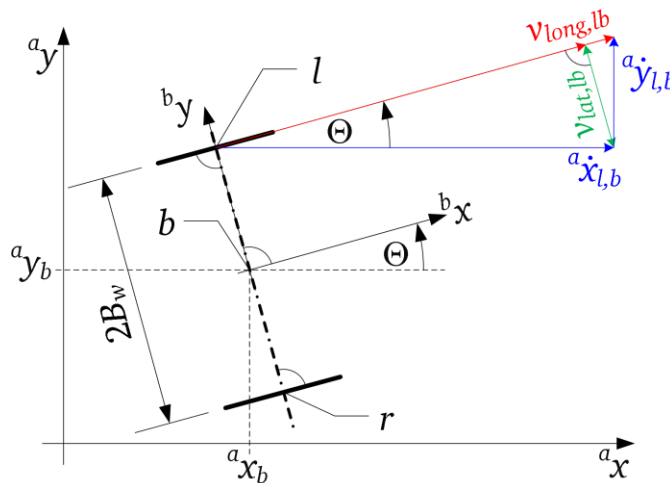


Abb. 4.3: Hinterräder des SCD. Am linken Rad ist das Geschwindigkeitsdreieck in unterschiedlichen Farben dargestellt: kartesische Komponenten (blau), Komponenten der longitudinalen Geschwindigkeit (rot) und Komponenten der lateralen Geschwindigkeit (grün).

Weiterhin wird die nichtholonome Bindung der Rollbewegung des linken Rades aus (4.20) und (4.15) als $v_{long,lb} = \dot{\Omega}_{l,b} R$ beschrieben

$$\dot{\Phi}_{S_{1,2}} = \frac{\partial \Phi_{S_{1,2}}}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} = -{}^a\dot{x}_b \cos \Theta - {}^a\dot{y}_b \sin \Theta + B_w \dot{\Theta} + (\dot{\alpha}_{l,b} + \dot{\phi}) R = 0, \tag{4.23}$$

und des rechten Rades aus (4.21) und (4.15) als $v_{long,rb} = \dot{\Omega}_{r,b} R$

$$\dot{\Phi}_{S_{1,3}} = \frac{\partial \Phi_{S_{1,3}}}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} = -{}^a\dot{x}_b \cos \Theta - {}^a\dot{y}_b \sin \Theta - B_w \dot{\Theta} + (\dot{\alpha}_{r,b} + \dot{\phi}) R = 0. \tag{4.24}$$

Die Bindungen $\dot{\Phi}_{S_{1,2}}$ und $\dot{\Phi}_{S_{1,3}}$ können durch die Summe der Gleichungen (4.23) und (4.24) zusammengefasst werden

$$\dot{\phi}_{S_{1,4}} = \frac{\partial \phi_{S_{1,4}}}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} = -2^a \dot{x}_b \cos \Theta - 2^a \dot{y}_b \sin \Theta + (\dot{\alpha}_{l,b} + \dot{\alpha}_{r,b} + 2\dot{\phi})R = 0. \quad (4.25)$$

Es reicht aus, nur eine Rollbindung zu setzen. Mit dieser einen Rollbindung und einer lateralen Bindung kann das SCD im mathematischen Sinn nicht seitlich wegrutschen und ebenso rollen beide Räder, ohne durchzurutschen. Das Subtrahieren der Gleichungen (4.23) und (4.24) ergibt folgende nützliche Beziehung

$$\dot{\Theta} = \frac{R}{2B_w} (\dot{\alpha}_{r,b} - \dot{\alpha}_{l,b}). \quad (4.26)$$

Diese Beziehung zeigt, dass die Drehgeschwindigkeit des SCD durch die Winkelgeschwindigkeitsdifferenz der Räder beim Rollen bestimmt ist. Die Beziehung ist integrierbar und gilt deshalb in der Positionsebene

$$\Theta = \frac{R}{2B_w} (\alpha_{r,b} - \alpha_{l,b}). \quad (4.27)$$

Die holonome Bindung des SCD zum Boden kann in der Positionsebene beschrieben werden

$$\phi_{S_{1,5}} = {}^a z_b - R = 0, \quad (4.28)$$

bzw. in der Geschwindigkeitsebene

$$\dot{\phi}_{S_{1,5}} = {}^a \dot{z}_b = 0. \quad (4.29)$$

Zusammengefasst werden die kinematischen Bindungen $\dot{\phi}_{S_{1,1}}$, $\dot{\phi}_{S_{1,4}}$ und $\dot{\phi}_{S_{1,5}}$ unter Berücksichtigung (4.27) in der Matrixform $\Phi_{\mathbf{q},S_1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ gegeben, $\Phi_{\mathbf{q},S_1} \in \mathbb{R}^{3 \times 7}$, wobei

$$\Phi_{\mathbf{q},S_1}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -2 \cos \Theta & -2 \sin \Theta & 0 & R & R & 2R & 0 \\ \sin \Theta & -\cos \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Statt der kartesischen Geschwindigkeiten wird aus praktischen Gründen die longitudinale Geschwindigkeit des SCD \dot{l} verwendet. Die Beziehung zu den kartesischen Geschwindigkeiten ist durch trigonometrische Funktionen gegeben

$${}^a \dot{x}_b = \dot{l} \cos \Theta, \quad {}^a \dot{y}_b = \dot{l} \sin \Theta. \quad (4.31)$$

Unter Einbezug der Komponenten von \dot{l} (4.31) in (4.25) kann die longitudinale Geschwindigkeit des SCD mittels Sensorgrößen ausgedrückt werden

$$\dot{l} = R \left(\frac{\dot{\alpha}_{r,b} + \dot{\alpha}_{l,b}}{2} + \dot{\phi} \right). \quad (4.32)$$

Für die Drehgeschwindigkeit des SCD wird $\dot{\Theta}$ gewählt. Die Winkelgeschwindigkeiten des Unterkörpers $\dot{\phi}$ und Oberkörpers $\dot{\rho}$ werden zusätzlich benötigt, um die Bewegungsbeschreibung des SCD zu vervollständigen

$$\dot{\mathbf{v}}_{S_1} = [\dot{l} \quad \dot{\phi} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\Theta}]^T. \quad (4.33)$$

Die Beziehung der abhängigen und unabhängigen Koordinaten in der Matrixform ist $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{v},S_1} \dot{\mathbf{v}}_{S_1}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_1} \in \mathbb{R}^{7 \times 4}$, mit

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_1} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & -1 & 0 & -\frac{B_w}{R} \\ \frac{1}{R} & -1 & 0 & \frac{B_w}{R} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Diskreter Zustand S_2 . Das SCD bewegt sich auf den Vorderrädern entlang des Bodens. Obwohl diese Räder im realen System vorhanden sind, wird im Modell auf sie verzichtet, um das Modell so einfach wie möglich zu halten. Die Vereinfachung verringert die Anzahl der abhängigen Koordinaten um zwei. Das Modell des SCD ist in diesem Zustand nur mit der Bodenbindung beschränkt. Jegliche Bewegungsrichtungen entlang des Bodens unterliegen keiner Bindung. Für Bewegungen in laterale Richtung trifft diese Annahme im realen System nicht zu. Da der Zustand S_2 im Betrieb vermieden werden soll, hat diese Einschränkung keine Relevanz. Um das unerwünschte Auftreten des Zustands S_2 in der Simulation prüfen zu können, muss er hier jedoch betrachtet werden.

Es besteht also nur eine holonome Bindung mit dem vorderen Teil des SCD zum Boden. Dazu wird die Möglichkeit hinzugefügt, den Höhenunterschied des vorderen Teils des SCD (Punkt d in Abb. 4.2) gegenüber dem hinteren Teil des SCD (Punkt b in Abb. 4.2) zu variieren. Der Höhenunterschied δ_{St} kann auch als Stufenhöhe bezeichnet werden (Abb. 3.4, Abb. 4.6).

Die holonome Bindung des SCD zum Boden kann in der Positionsebene beschrieben werden

$$\phi_{S_2} = {}^a z_b + 2L \cos \phi - R - \delta_{St} = 0, \quad (4.35)$$

bzw. in der Geschwindigkeitsebene

$$\dot{\phi}_{S_2} = {}^a \dot{z}_b - 2L \dot{\phi} \sin \phi = 0. \quad (4.36)$$

In der einheitlichen Darstellungsform wird die kinematische Bindung ϕ_{S_2} in der Matrixform $\Phi_{\mathbf{q},S_2}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ gegeben, $\Phi_{\mathbf{q},S_2} \in \mathbb{R}^{1 \times 7}$, mit

$$\Phi_{\mathbf{q},S_2}(\mathbf{q}) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2L \sin \phi \quad 0]. \quad (4.37)$$

Da in diesem Zustand kein Eingriff der Regelung vorgesehen ist, wird das Modell in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v}_{S_2} nicht benötigt. Deshalb wird auf die Herleitung der Transformationsmatrix $\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_2}$ verzichtet.

Diskreter Zustand S_3 . Das SCD bewegt sich auf allen Rädern entlang des Bodens. Wie schon in der Beschreibung des Zustands S_2 , sind im Modell die Vorderräder nicht vorhanden. Deshalb kann es eine Abweichung zwischen dem realen Verhalten gegenüber dem Modell geben. Während in dem Modell das Drehen des SCD um die eigene Achse Θ möglich ist, ist es in der Realität durch die Vorderräder behindert.

Die Bindungen im Zustand S_3 setzen sich zusammen aus den Bindungen des Zustands S_1 und S_2 . Daher werden die zwei nichtholonomen $\dot{\phi}_{S_1,1}$ und $\dot{\phi}_{S_1,4}$ und zwei holonomen Bindungen $\dot{\phi}_{S_1,5}$ und $\dot{\phi}_{S_2}$ zusammengesetzt unter Berücksichtigung (4.27) in der Matrixform $\Phi_{\mathbf{q},S_3}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ gegeben, $\Phi_{\mathbf{q},S_3} \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$, mit

$$\Phi_{\mathbf{q},S_3}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -2 \cos \Theta & -2 \sin \Theta & 0 & R & R & 2R & 0 \\ \sin \Theta & -\cos \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2L \sin \phi & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Da sich das SCD mit allen Rädern auf dem Boden befindet, ist die Unterkörpergeschwindigkeit $\dot{\phi}$ gleich Null. Im Vergleich zu Zustand S_1 hat der Vektor der unabhängigen Variablen hier eine Dimension weniger

$$\dot{\mathbf{v}}_{S_3} = [\dot{l} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\Theta}]^T. \quad (4.39)$$

Die Beziehung der abhängigen und unabhängigen Koordinaten in der Matrixform ist $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{v},S_3} \dot{\mathbf{v}}_{S_3}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_3} \in \mathbb{R}^{7 \times 3}$, mit

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_3} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{B_w}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{B_w}{R} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Zusammenfassung. Die kinematischen Eigenschaften des SCD unterscheiden sich abhängig vom diskreten Zustand S_i . In Tab. 4.1 sind die kinematischen Eigenschaften für alle behandelten Zustände S_i dargestellt. Die Anzahl der abhängigen Koordinaten ist in allen Zuständen gleich, weil sich diese Koordinaten nicht ändern. Die Anzahl der holonomen und nichtholonomen Bindungen sowie die Anzahl der Freiheitsgrade der Lage und der Geschwindigkeit ändern sich jedoch. Folglich unterscheidet sich auch die Anzahl der unabhängigen Koordinaten.

Tab. 4.1 macht eine der Eigenschaften der hybriden dynamischen Systeme, zu welchen auch das hier betrachtete SCD gehört, deutlich. Die variierenden kinematischen Eigenschaften müssen sowohl in der Analyse als auch bei dem Reglerentwurf berücksichtigt werden.

Tab. 4.1: Darstellung der durch Bindungen bedingten kinematischen Eigenschaften des SCD in den unterschiedlichen diskreten Zuständen S_i .

Eigenschaft in Abhängigkeit des diskreten Zustands S_i	S_0	S_1	S_2	S_3
Anzahl n der abhängigen Koordinaten \mathbf{q}	7			
Anzahl der holonomen Bindungen m_{hol,S_i}	0	1	1	2
Anzahl der nichtholonomen Bindungen m_{nhol,S_i}	0	2	0	2
Freiheitsgrade der Lage $d_{fp,S_i} = n - m_{hol,S_i}$	7	6	6	5
Freiheitsgrade der Geschwindigkeit $d_{fv,S_i} = n - (m_{hol,S_i} + m_{nhol,S_i})$	7	4	6	3
Anzahl der unabhängigen Koordinaten \mathbf{v}_{S_i}	7	4	6	3

4.1.4 Kinetik

Das dynamische Verhalten des mechanischen Teils des SCD ist, wie im Kapitel 2.1.2 dargestellt, unter Einfluss von äußeren und Bindungskräften mittels der *Lagrange I* Gleichungen (2.17) beschreibbar. Dazu müssen die kinetische und potentielle Energie im mechanischen System bestimmt werden.

Kinetische Energie. Die kinetische Energie ist abhängig von den Translationsgeschwindigkeiten der Massenzentren einzelner Körper in T_{tran} sowie den Rotationsgeschwindigkeiten der einzelnen Körper, betrachtet um das eigene Massenzentrum in T_{rot} (2.18). Unter Annahme symmetrischer Masseverteilung der betrachteten Körper kann die Energie T_{tran} durch die Ortsvektorgeschwindigkeiten der geometrischen Schwerpunkte (Gleichungen (B.22) bis (B.26)) bestimmt werden. Es müssen folgende Körper betrachtet werden: SCD Unterkörper mit dem Stator des Oberkörperantriebes, SCD Oberkörper mit dem Rotor des Oberkörperantriebes, zwei Hinterräder mit Antrieben und zwei Vorderräder. Dementsprechend ist die kinetische Energie T_{tran}

$$\begin{aligned}
 T_{tran} = & \frac{1}{2} M {}^a\dot{\mathbf{r}}_c^T {}^a\dot{\mathbf{r}}_c + \frac{1}{2} M_B {}^a\dot{\mathbf{r}}_e^T {}^a\dot{\mathbf{r}}_e + \frac{1}{2} m_{w,b} {}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,b}^T {}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,b} + \frac{1}{2} m_{w,b} {}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,b}^T {}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,b} + \\
 & + \frac{1}{2} m_{w,d} {}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,d}^T {}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,d} + \frac{1}{2} m_{w,d} {}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,d}^T {}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,d}.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

In die kinetische Energie der Rotation T_{rot} sind Drehgeschwindigkeiten folgender Körper einzubeziehen: SCD Unterkörper mit dem Stator des Oberkörperantriebes, SCD Oberkörper und zwei Hinterräder mit Antrieben. Dementsprechend ist die kinetische Energie T_{rot}

$$T_{rot} = \frac{1}{2} {}^c\boldsymbol{\omega}_c^T \mathbf{J}_{cm,c} {}^c\boldsymbol{\omega}_c + \frac{1}{2} {}^e\boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J}_{cm,e} {}^e\boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2} J_w \omega_{l,b}^2 + \frac{1}{2} J_w \omega_{r,b}^2. \tag{4.42}$$

Für Unterkörper und Oberkörper wird aufgrund der hohen Trägheitsmomente die räumliche Drehung betrachtet. Die Trägheitsmatrix des Unterkörpers um das eigene Massenzentrum $\mathbf{J}_{cm,c}$ besteht aus den Komponenten $\mathbf{J}_{cm,c} = \text{diag}(J_x, J_y, J_z)$ und die Trägheit des Oberkörpers um das eigene Massenzentrum $\mathbf{J}_{cm,e}$ besteht aus den Komponenten $\mathbf{J}_{cm,e} = \text{diag}(J_{B,x}, J_{B,y}, J_{B,z})$. Bei den Rädern

wird nur die Drehbewegung in Rollrichtung berücksichtigt. Die Trägheitsmomente der Antriebsmotoren werden später beim Einführen der Aktoren in das Modell einbezogen. Die Rotationsenergie der Vorderräder ist in (4.42) aufgrund der kleinen Trägheitsmomente und nicht betrachteten Drehfreiheitsgraden ausgeschlossen.

Potentielle Energie. Die potentielle Energie des Systems besteht im Höhenunterschied der einzelnen Körper des SCD entlang den Gravitationslinien der Erde (2.21). Als Referenzhöhe wird der ebene Boden definiert.

Folgende Körper werden in die potentielle Energie des Systems einbezogen: SCD Unterkörper mit dem Stator des Oberkörperantriebes, SCD Oberkörper mit dem Rotor des Oberkörperantriebes, zwei Hinterräder mit Antrieben und zwei Vorderräder. Dementsprechend ist die potentielle Energie V

$$V = M g {}^a\bar{r}_{c,3} + M_B g {}^a\bar{r}_{e,3} + 2m_{w,b} g {}^a\bar{r}_{b,3} + 2m_{w,d} g {}^a\bar{r}_{r,d,3}. \quad (4.43)$$

Äußere Kräfte. Die äußeren Kräfte bzw. Momente verrichten Arbeit am System durch Aktoren an den Hinterrädern (Moment am linken Rad $M_{l,b}(t)$ und rechten Rad $M_{r,b}(t)$) und am Oberkörper des SCD (Moment $M_{body}(t)$). Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte (2.22) setzt die äußeren Kräfte mit den entsprechenden Winkelvariablen zusammen

$$\delta W = M_{l,b} \delta \alpha_{l,b} + M_{r,b} \delta \alpha_{r,b} + M_{body} \delta \rho. \quad (4.44)$$

Die äußeren Momente werden in einem Vektor $\mathbf{\tau}$ zusammengefasst

$$\mathbf{\tau} = \begin{bmatrix} M_{l,b} \\ M_{r,b} \\ M_{body} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

und in das System durch den partiellen Einfluss \mathbf{E}_q entsprechend der Komponente von \mathbf{q} eingeführt

$$\mathbf{E}_q \mathbf{\tau} = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta \mathbf{q}^T)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{l,b} \\ M_{r,b} \\ M_{body} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Dynamik in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} . Das Modell der zeitkontinuierlichen Dynamik des SCD erhält man in Form der Gleichungen (2.28) und (2.29). Da das SCD in vier unterschiedlichen diskreten Zuständen S_i , $i = \{0,1,2,3\}$ betrachtet wird, ergeben sich vier Gleichungspaare in der Matrixform

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_q(\mathbf{q}) & -\Phi_{q,S_i}^T(\mathbf{q}) \\ \Phi_{q,S_i}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda_{S_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_q \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{G}_q(\mathbf{q}) \\ -\Phi_{q,S_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Die kinematischen Bindungsmatrizen $\Phi_{q,S_i}(\mathbf{q})$ sind in (4.16), (4.30), (4.37) und (4.38) dargestellt worden. Der Vektor der abhängigen Variablen \mathbf{q} ist in (4.18) definiert. Die externen Momente sind mittels (4.45) und (4.46) gegeben. Die restlichen Größen von (4.47) werden im Folgenden hergeleitet bzw. definiert. Es soll darauf hingewiesen werden, dass sich nicht alle Größen mit dem diskreten Zustand S_i ändern.

Die Matrizen $\mathbf{H}_q(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und $\mathbf{G}_q(\mathbf{q})$ werden aus den Ausdrücken der Systemenergie (4.41) bis (4.43) anhand der *Lagrange I* Gleichung (2.17) hergeleitet.

Konkret wird die Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_q(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ anhand (2.27) bestimmt

$$\mathbf{H}_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} H_{q,11} & 0 & 0 & H_{q,41} & -H_{q,41} & H_{q,61} & H_{q,71} \\ 0 & H_{q,11} & 0 & H_{q,42} & -H_{q,42} & H_{q,62} & H_{q,72} \\ 0 & 0 & H_{q,11} & 0 & 0 & H_{q,63} & H_{q,73} \\ H_{q,41} & H_{q,42} & 0 & H_{q,44} & H_{q,54} & H_{q,64} & 0 \\ -H_{q,41} & -H_{q,42} & 0 & H_{q,54} & H_{q,44} & H_{q,64} & 0 \\ H_{q,61} & H_{q,62} & H_{q,63} & H_{q,64} & H_{q,64} & H_{q,66} & H_{q,76} \\ H_{q,71} & H_{q,72} & H_{q,73} & 0 & 0 & H_{q,76} & H_{q,77} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Die Elemente von $\mathbf{H}_q(\mathbf{q})$ sind im Anhang (Gleichungen (B.27) bis (B.41)) gegeben. Die Zentrifugal- und *Coriolis*- Matrix $\mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ wird entsprechend (2.25) bestimmt

$$\mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{q,1} \\ C_{q,2} \\ C_{q,3} \\ C_{q,4} \\ -C_{q,4} \\ C_{q,6} \\ C_{q,7} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Die Elemente von $\mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ sind ebenfalls im Anhang (Gleichungen (B.42) bis (B.47)) gegeben. Die Gravitations- Matrix $\mathbf{G}_q(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ wird entsprechend (2.26) bestimmt

$$\mathbf{G}_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(M_B + 2m_{wb} + 2m_{wd} + M) \\ 0 \\ 0 \\ -gM_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) - gL\sin(\phi)(4m_{wd} + M) \\ -gHM_B\sin(\rho + \phi) \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Modell der Aktoren. Die Aktoren bestehen, wie bereits beschrieben, aus DC-Motoren und Getrieben. Die zwei Radantriebe und zwei Oberkörperantriebe werden zusammenfassend in der Matrixform beschrieben. Die Motorgrößen werden im Folgenden in Singularform benannt.

Das Modell eines DC-Motors inklusive Getriebe besteht aus folgenden vier Matrixgleichungen [66]

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \hat{\mathbf{R}}_a \hat{\mathbf{i}}_a + \hat{\mathbf{L}}_a \frac{d\hat{\mathbf{i}}_a}{dt} + \hat{\mathbf{R}}_e \hat{\boldsymbol{\omega}}_m. \quad (4.51)$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{u}}_a = \hat{\mathbf{u}}_a(t) = [u_{l,b}, u_{r,b}, u_{l,body}, u_{r,body}]^T$ die angelegte Spannung am Rotor, $\hat{\mathbf{i}}_a = \hat{\mathbf{i}}_a(t) = [i_{l,b}, i_{r,b}, i_{l,body}, i_{r,body}]^T$ der Strom durch den Anker und $\hat{\boldsymbol{\omega}}_m = \hat{\boldsymbol{\omega}}_m(t) = [\omega_{l,b}, \omega_{r,b}, \omega_{l,body}, \omega_{r,body}]^T$ die Motordrehzahl. Mit Berücksichtigung der Einheitsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ist $\hat{\mathbf{R}}_a = R_a \mathbf{E}$ der Ohmsche Widerstand, $\hat{\mathbf{L}}_a = L_a \mathbf{E}$ die Induktivität des Ankers und $\hat{\mathbf{R}}_e = K_e \mathbf{E}$ die Spannungskonstante. Das elektrische Moment $\hat{\mathbf{M}}_e = \hat{\mathbf{M}}_e(t) = [M_{e,l,b}, M_{e,r,b}, M_{e,l,body}, M_{e,r,body}]^T$ des Motors ist mittels der Momentkonstante $\hat{\mathbf{K}}_m = K_m \mathbf{E}$ bestimmt

$$\hat{\mathbf{M}}_e = \hat{\mathbf{K}}_m \hat{\mathbf{i}}_a. \quad (4.52)$$

Die Getriebeuntersetzung $\hat{\mathbf{i}}_G = \text{diag}(i_{G,wh}, i_{G,wh}, i_{G,bd}, i_{G,bd})$ verknüpft die Geschwindigkeit des Motors $\hat{\boldsymbol{\omega}}_m$ (Antrieb) mit der Geschwindigkeit des Abtriebs $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) = [\dot{\alpha}_{l,b}, \dot{\alpha}_{r,b}, \dot{\rho}_l, \dot{\rho}_r]^T$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_m = \hat{\mathbf{i}}_G \hat{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (4.53)$$

Für die Dynamik des Rotors gilt

$$\hat{\mathbf{J}}_m \dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}_m = \hat{\mathbf{M}}_e - \hat{\mathbf{i}}_G^{-1} (\hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\mathbf{B}}_v \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \hat{\mathbf{B}}_c \text{sign}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})). \quad (4.54)$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{J}}_m = J_m \mathbf{E}$ das Trägheitsmoment des Rotors, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(t) = [M_{l,b}, M_{r,b}, M_{body,l}, M_{body,r}]^T$ das äußere Moment, $\hat{\mathbf{B}}_v = \text{diag}(B_{v,wh}, B_{v,wh}, B_{v,bd}, B_{v,bd})$ der Parameter der viskosen Reibung und $\hat{\mathbf{B}}_c = [B_{c,wh}, B_{c,wh}, B_{c,bd}, B_{c,bd}]^T$ die Coulombsche (trockene) Reibung. Es sei bemerkt, dass das äußere Moment $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ das Abtriebsmoment darstellt. Nach dem Wechselwirkungsprinzip²³ ist dieses Moment gleich dem Moment, das als Eingang des mechanischen Teils des SCD Systems wirkt. Die Reibungsparameter $\hat{\mathbf{B}}_v$ und $\hat{\mathbf{B}}_c$ bestimmen die gesamte Reibung der Antriebseinheit und werden durch Messungen bestimmt (Kapitel 3.3 und Kapitel A.2).

Wie im Kapitel 3.3 erwähnt, wird zur Ansteuerung der DC-Motoren eine Stromregelung verwendet (Block „Aktorik“ im Blockschaltbild in Abb. 5.1). Der Regler hat die Aufgabe, den Strom des Motors $i_{k,j}$, $j \in \{l, r\}$, $k \in \{body, b\}$ (Regelgröße) auf den Wert des Sollstroms $i_{s,k,j}$ (Sollgröße), der aus dSPACE gestellt wird, mittels der Spannung $u_{k,j}$ (Stellgröße) zu regeln. Über die Leistungselektronikeinheit kann das Verhalten des geschlossenen Regelkreises mittels eines Freiheitsgrades beeinflusst werden. Anhand von Sprungantworten des Stromes wurde ein möglichst schnelles und gut gedämpftes (5% bis 10% Überschwingung) Verhalten eingestellt. Die Anstiegs-

²³ lat. *actio et reactio*, das 3. Newtonsche Axiom

zeit des Stroms beträgt dabei weniger als 1 ms und ist deutlich schneller als die Dynamik des mechanischen Teils des Systems.

Dies hat die gerechtfertigte Annahme zur Folge, dass der Motorstrom $\hat{\mathbf{i}}_a$ dem Sollstrom $\hat{\mathbf{i}}_{s,a}$ „unendlich“ schnell folgt, $\hat{\mathbf{i}}_{s,a} = \hat{\mathbf{i}}_a$. Weiterhin wird der Einfluss der induzierten Spannung $\hat{\mathbf{K}}_e \hat{\boldsymbol{\omega}}_m$ in (4.51), der als Störung des Stromregelkreises zu betrachten ist, so schnell ausgeglichen, dass er vernachlässigt werden kann. Somit kann der elektrische Teil des Motors als entkoppelt von dem Einfluss des mechanischen Teils des SCD betrachtet werden. Zusammenfassend kann man sagen, dass durch die schnelle Stromregelung der DC-Motor als „idealer“ Momentstellglied modelliert werden kann. Unter Berücksichtigung dieser Annahme sowie Einsetzen der Gleichungen (4.52) und (4.53) in (4.54) erhält man die Gleichung der stromgeregelten Antriebseinheit

$$\hat{\mathbf{i}}_G^2 \mathbf{J}_m \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{B}_v \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\mathbf{i}}_G \mathbf{K}_m \hat{\mathbf{i}}_a - \hat{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{B}_c. \quad (4.55)$$

Als Eingang ist der Sollstrom $\hat{\mathbf{i}}_{s,a} = \hat{\mathbf{i}}_a$ zu betrachten. Dem Moment, das durch diesen Strom generiert wird, wirken das äußere Moment $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ und die Reibung \mathbf{B}_c entgegen. Die dämpfende Komponente gemäß $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ und die Trägheitskomponente gemäß $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ werden im Folgenden beim Verbinden des mechanischen Modells des SCD mit dem vorhandenen Aktormodell den entsprechenden Komponenten addiert.

Reibung. Bei der Drehung der Räder gegenüber dem Unterkörper sowie der Drehung des Oberkörpers gegenüber dem Unterkörper entstehen Reibungsmomente, die Energieverluste verursachen und das dynamische Verhalten des SCD beeinflussen. Die Parameter der Reibung werden als *Coulombsche* (trockene) B_c und viskose Reibung B_v anhand von Messungen identifiziert. Die Messungen wurden indirekt durch Messung des Stromes der entsprechenden Antriebseinheit ohne Belastung bei konstanten Drehzahlen durchgeführt. Aus dem gemessenen Strom kann auf das Reibungsmoment geschlossen werden, was den Hauptverlust der Antriebseinheit darstellt. Die Messungen sind im Anhang, Kapitel A.2 dargestellt.

Komplettes Modell in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} . Zum mechanischem Teil des Modells (4.47) wird das Modell der Antriebseinheiten hinzugefügt, um das vollständige Modell der zeitkontinuierlichen Dynamik des SCD zu erhalten.

Da die beiden Oberkörperantriebe auf den als starr angenommenen Oberkörper des SCD wirken, addiert sich deren Wechselwirkung $M_{body} = M_{body,l} + M_{body,r}$. Ebenfalls addieren sich die durch den Strom erzeugten elektrischen Momente bzw. deren Ursachen, die Ströme: $i_{body} = i_{body,l} + i_{body,r}$. Durch die geometrische Kopplung an den Oberkörper sind die Geschwindigkeiten beider Antriebseinheiten gleich: $\dot{\rho} = \dot{\rho}_l = \dot{\rho}_r$. Daher werden die den Oberkörper betreffende dritte und vierte Zeile der Matrixgleichung (4.55) addiert. Daraus resultiert zusammen mit der ersten und zweiten Zeile die neue Matrixgleichung

$$\hat{\mathbf{i}}_G^2 \mathbf{J}_m \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{B}_v \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\mathbf{i}}_G \mathbf{K}_m \hat{\mathbf{i}}_a - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{B}_c \text{sign}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (4.56)$$

Die Parameter in (4.56) ändern sich dadurch gegenüber den Parametern in (4.55) folgendermaßen: Getriebeübersetzung $\mathbf{i}_G = \text{diag}(i_{G,wh}, i_{G,wh}, i_{G,bd})$, Trägheitsmoment $\mathbf{J}_m = \text{diag}(J_m, J_m, 2J_m)$, Momentkonstante $\mathbf{K}_m = \text{diag}(K_m, K_m, K_m)$, viskose Reibung $\mathbf{B}_v = \text{diag}(B_{v,wh}, B_{v,wh}, 2B_{v,bd})$ und Coulombsche Reibung $\mathbf{B}_c = [B_{c,wh}, B_{c,wh}, 2B_{c,bd}]^T$. Die Variablen beinhalten jetzt: $\boldsymbol{\tau} = [M_{l,b}, M_{r,b}, M_{body}]^T$, $\mathbf{i}_a = [i_l, i_r, i_{body}]^T$ und $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = [\dot{\alpha}_{l,b}, \dot{\alpha}_{r,b}, \dot{\rho}]^T$. Die zusammengesetzte virtuelle Oberkörperantriebseinheit hat durch die mechanische Verbindung das doppelte Trägheitsmoment und die doppelte Reibung, deren kinematische Bewegungsgrößen sind identisch. Der Sollstrom wird gleichmäßig auf die Oberkörperantriebe aufgeteilt und somit gilt: $i_{body,l} = i_{body}/2$ bzw. $i_{body,r} = i_{body}/2$. Die Strombegrenzung des virtuellen Oberkörperantriebes ist entsprechend doppelt so groß wie die Begrenzung eines einzelnen Antriebs.

Um den Zusammenhang der Antriebseinheit (4.56) mit dem mechanischen Modell (4.47) erstellen zu können, wird noch die Beziehung der Variablen $\dot{\mathbf{q}}$ mit $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ benötigt. Dies ist einfach durch folgende Matrix zu erreichen

$$\mathbf{T}_{q2\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

welche die Koordinaten $\dot{\mathbf{q}}$ nach $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ transformiert

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{T}_{q2\alpha} \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.58)$$

Das äußere Moment der Antriebseinheit $\boldsymbol{\tau}$ in (4.56), wirkt auf die Antriebseinheit als Lastmoment und aufgrund des Wechselwirkungsprinzips gleich dem Antriebsmoment des mechanischen Teils des SCD in (4.47). Nach dem Einsetzen von $\boldsymbol{\tau}$ aus (4.56) in (4.47) unter Berücksichtigung von (4.57) und (4.58) erhält man den Strom \mathbf{i}_a als Eingang des Systems. Das vollständige Modell des SCD beinhaltet den mechanischen Teil inklusive der Antriebseinheit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{qm}(\mathbf{q}) & -\Phi_{q,S_i}^T(\mathbf{q}) \\ \Phi_{q,S_i}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\lambda}_{S_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_q(\mathbf{i}_G \mathbf{K}_m \mathbf{i}_a - \mathbf{B}_c \text{sign}(\dot{\boldsymbol{\alpha}})) - \mathbf{C}_{qm}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{G}_q(\mathbf{q}) \\ -\dot{\Phi}_{q,S_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Gegenüber der Matrizen \mathbf{H}_q (4.48) und \mathbf{C}_q (4.49) ändern sich in \mathbf{H}_{qm} und \mathbf{C}_{qm} einige Elemente. Die Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_{qm}(\mathbf{q})$ beinhaltet zusätzlich die Trägheitsmomente, reduziert auf die \mathbf{q} Koordinaten

$$H_{qm,44} = H_{q,44} + J_m i_{G,wh}^2 \quad (4.60)$$

und

$$H_{qm,77} = H_{q,77} + 2J_m i_{G,wh}^2. \quad (4.61)$$

Die viskose Reibung ist von der Geschwindigkeit abhängig und taucht deshalb in Matrix $\mathbf{C}_{qm}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ auf. Es ändern sich folgende Elemente

$$C_{qm,4} = C_{q,4} + B_{v,wh} \dot{\alpha}_{l,b}, \quad (4.62)$$

$$C_{\mathbf{q}m,5} = -C_{\mathbf{q},4} + B_{v,wh} \dot{\alpha}_{r,b} \quad (4.63)$$

und

$$C_{\mathbf{q}m,7} = C_{\mathbf{q},7} + 2B_{v,bd} \dot{\rho}. \quad (4.64)$$

Das erhaltene Gesamtmodell der zeitkontinuierlichen Dynamik des SCD (4.59) wird für die Simulation verwendet.

Dynamik in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} . Für den Reglerentwurf wird das kompaktere Modell in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} entsprechend Gleichung (2.36) verwendet. Während bei dem Modell in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} (4.59) die Matrizen $\mathbf{H}_{\mathbf{q}m}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{q}m}$ und $\mathbf{G}_{\mathbf{q}}$ in allen diskreten Zuständen S_i gleich waren, ändern sich die entsprechenden Matrizen in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} mit dem diskreten Zustand S_i . Dies ist verständlich, da jetzt für jeden diskreten Zustand S_i die Bewegungsbegrenzung, definiert durch Bindungen in jedem Zustand S_i , explizit in die Dynamik des Systems einfließt. Die teils redundanten Informationen werden eliminiert und es entsteht eine minimale Darstellung der Systemdynamik.

Die *Coulombsche* Reibung, in (4.59) bezeichnet mit $\mathbf{B}_c \text{sign}(\dot{\alpha})$, wird hier bei der Herleitung des Modells für den Reglerentwurf nicht berücksichtigt. Die *Signum* Funktion stellt eine diskontinuierliche Nichtlinearität dar. Die Behandlung solcher Nichtlinearitäten ist in der Methodik, die in dieser Arbeit für den Reglerentwurf angewandt wird, in einer analytischen Form nicht geeignet. Trotzdem werden diese Reibung und deren Effekte bei Radantrieben kompensiert, wobei die Parametrierung der Kompensationsvorschrift am realen SCD nach [8] angepasst wurde.

Die Regelung des SCD wird für die diskreten Zustände S_1 und S_3 entworfen. Daher werden die Modelle in unabhängigen Koordinaten nur in diesen beiden Zuständen hergeleitet. Die zugehörigen unabhängigen Koordinaten \mathbf{v}_{S_1} und \mathbf{v}_{S_3} wurden bereits in (4.33) und (4.39) hergeleitet. Entsprechend Gleichung (2.35) werden zunächst die Trägheitsmatrizen ermittelt

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_i}}(\mathbf{v}_{S_i}) = \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{S_i}}^T \mathbf{H}_{\mathbf{q}m}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{S_i}}, \quad i \in \{1,3\}. \quad (4.65)$$

Für den Zustand S_1 wird die Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_1}}(\mathbf{v}_{S_1})$ ausgehend von $\mathbf{H}_{\mathbf{q}m}(\mathbf{q})$ in (4.59) und $\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{S_1}}$ in (4.34) berechnet

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_1}}(\mathbf{v}_{S_1}) = \begin{bmatrix} H_{\mathbf{v}_{S_1},11} & H_{\mathbf{v}_{S_1},12}(\phi, \rho) & H_{\mathbf{v}_{S_1},13}(\phi, \rho) & 0 \\ H_{\mathbf{v}_{S_1},12}(\phi, \rho) & H_{\mathbf{v}_{S_1},22}(\rho) & H_{\mathbf{v}_{S_1},23}(\rho) & 0 \\ H_{\mathbf{v}_{S_1},13}(\phi, \rho) & H_{\mathbf{v}_{S_1},23}(\rho) & H_{\mathbf{v}_{S_1},33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{\mathbf{v}_{S_1},44}(\phi, \rho) \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Für den Zustand S_3 wird die Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_3}}(\mathbf{v}_{S_3})$ ausgehend von $\mathbf{H}_{\mathbf{q}m}(\mathbf{q})$ in (4.59) und $\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{S_3}}$ in (4.40) berechnet

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_3}}(\mathbf{v}_{S_3}) = \begin{bmatrix} H_{\mathbf{v}_{S_3},11} & H_{\mathbf{v}_{S_3},12}(\phi, \rho) & 0 \\ H_{\mathbf{v}_{S_3},12}(\phi, \rho) & H_{\mathbf{v}_{S_3},22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{\mathbf{v}_{S_3},33}(\phi, \rho) \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Die Elemente der Matrizen $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_1}}$ und $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_3}}$ sind im Anhang in Gleichungen (B.48) bis (B.54) und (B.55) bis (B.58) gegeben.

Im Zustand S_3 sind einige Elemente formal vom Winkel ϕ abhängig, obwohl ϕ in S_3 unverändert bleibt und ϕ ebenso in \mathbf{v}_{S_3} nicht auftritt, da das SCD mit allen Rädern Kontakt hat. Der Grund dafür ist, dass die Neigung des Oberkörpers mit dem Winkel ρ bestimmt ist, welcher den relativen Winkel, ausgehend vom Unterkörper des SCD, darstellt. Der absolute Winkel $\phi + \rho$ der Oberkörperneigung ist maßgebend für die Dynamik des SCD, obwohl ϕ im S_3 konstant bleibt. Im Zustand S_3 kann die Abhängigkeit von ϕ als Parameterabhängigkeit der unterschiedlichen Neigungen des Unterkörpers im Bodenkontakt gedeutet werden.

Der nächste Schritt ist die Herleitung der Matrix mit geschwindigkeitsabhängigen Elementen. Die Elemente beinhalten zusammengefügt Zentrifugal-, *Coriolis*-, Gravitations- und Reibungskomponenten. Entsprechend Gleichung (2.35) werden die geschwindigkeitsabhängigen Matrizen ermittelt

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_i}}(\mathbf{v}_{S_i}, \dot{\mathbf{v}}_{S_i}) = \mathbf{J}_{\mathbf{v},S_i}^T \left(\mathbf{H}_{qm}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{v},S_i} \dot{\mathbf{v}}_{S_i} + \mathbf{C}_{qm}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_q(\mathbf{q}) \right), \quad i \in \{1,3\}. \quad (4.68)$$

Für den Zustand S_1 wird die Matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_1}}(\mathbf{v}_{S_1}, \dot{\mathbf{v}}_{S_1})$ ausgehend vom Modell in (4.59) und $\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_1}$ in (4.34) berechnet

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_1}}(\mathbf{v}_{S_1}, \dot{\mathbf{v}}_{S_1}) = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{v}_{S_1},1}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \\ C_{\mathbf{v}_{S_1},2}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \\ C_{\mathbf{v}_{S_1},3}(\phi, \rho, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \\ C_{\mathbf{v}_{S_1},4}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Für den Zustand S_3 wird die Matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_3}}(\mathbf{v}_{S_3}, \dot{\mathbf{v}}_{S_3})$ ausgehend vom Modell in (4.59) und $\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_3}$ in (4.40) berechnet

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_3}}(\mathbf{v}_{S_3}, \dot{\mathbf{v}}_{S_3}) = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{v}_{S_3},1}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \\ C_{\mathbf{v}_{S_3},2}(\phi, \rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \\ C_{\mathbf{v}_{S_3},3}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Die Elemente der Matrizen $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_1}}$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_3}}$ sind im Anhang in den Gleichungen (B.59) bis (B.62) und (B.63) bis (B.65) gegeben.

Die Eingangsmatrix wird hier entsprechend der Gleichung (2.35) bezüglich des Modells (4.59) durch Multiplikation von $\mathbf{J}_{\mathbf{v},S_i}^T \mathbf{E}_q \mathbf{i}_G \mathbf{K}_m \mathbf{i}_a$ berechnet. In diesem Schritt liegt es nahe, die Eingangsgrößen in das Modell auf andere Weise zu bilden. Der Eingangsvektor \mathbf{i}_a beinhaltet die Ströme i_l , i_r und i_{body} , was physikalisch sinnvoll ist, weil diese Ströme den jeweiligen Aktoren entsprechen.

Aus regelungstechnischer Perspektive, ist es übersichtlicher, die Ströme i_l und i_r umzuformulieren, so dass eine Größe

$$i_{long} = i_r + i_l \quad (4.71)$$

die longitudinale Bewegung bewirkt und die Größe

$$i_{yaw} = i_r - i_l \quad (4.72)$$

die Drehung des SCD bewirkt. Um den neuen Eingangsvektor \mathbf{i}_v zu bilden

$$\mathbf{i}_v = \begin{bmatrix} i_{long} \\ i_{body} \\ i_{yaw} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

und den als Systemeingang verwenden zu können, wird die Transformation des Vektors \mathbf{i}_a zu \mathbf{i}_v benötigt. Diese Transformation kann aus (4.71) und (4.72) hergeleitet werden

$$\mathbf{T}_\tau = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Unter Berücksichtigung der Transformation des Eingangsvektors $\mathbf{i}_a = \mathbf{T}_\tau \mathbf{i}_v$ kann die Eingangsmatrix bestimmt werden

$$\mathbf{E}_{v_{S_i}} = \mathbf{J}_{v,S_i}^T \mathbf{E}_q \mathbf{i}_G \mathbf{K}_m \mathbf{T}_\tau, \quad i \in \{1,3\}. \quad (4.75)$$

Die Berechnung von (4.75) ergibt für den Zustand S_1

$$\mathbf{E}_{v_{S_1}} = \begin{bmatrix} \frac{K_m i_{G,wh}}{R} & 0 & 0 \\ -K_m i_{G,wh} & 0 & 0 \\ 0 & K_m i_{G,bd} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_w K_m i_{G,wh}}{R} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

und für den Zustand S_3

$$\mathbf{E}_{v_{S_3}} = \begin{bmatrix} \frac{K_m i_{G,wh}}{R} & 0 & 0 \\ 0 & K_m i_{G,bd} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_w K_m i_{G,wh}}{R} \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Die berechneten Matrizen $\mathbf{E}_{v_{S_1}}$ bzw. $\mathbf{E}_{v_{S_3}}$ bilden aus den Eingangsgrößen \mathbf{i}_v (4.73) Momente, die unmittelbar die Dynamik des SCD der Variablen \mathbf{v}_{S_1} bzw. \mathbf{v}_{S_3} beeinflussen.

Letztendlich wird das Modell der zeitkontinuierlichen Dynamik des SCD für beide betrachteten diskreten Zustände S_1 und S_3 formuliert

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_i}}(\mathbf{v}_{S_i}) \ddot{\mathbf{v}}_{S_i} + \mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_i}}(\mathbf{v}_{S_i}, \dot{\mathbf{v}}_{S_i}) = \mathbf{E}_{\mathbf{v}_{S_i}} \mathbf{i}_{\mathbf{v}}, \quad i \in \{1, 3\}. \quad (4.78)$$

Der Eingangsvektor $\mathbf{i}_{\mathbf{v}}$ ist in (4.73) gegeben, die Eingangsmatrix $\mathbf{E}_{\mathbf{v}_{S_i}}$ in (4.76) bzw. (4.77), die Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_i}}$ in (4.66) bzw. (4.67), die geschwindigkeitsabhängige Matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_i}}$ in (4.69) bzw. (4.70) und die Variablen \mathbf{v}_{S_i} in (4.33) bzw. (4.39).

Bei Betrachtung der Matrizenelemente von $\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{S_i}}$ und $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_i}}$ ist ersichtlich, dass diese Matrizen nicht von der longitudinalen Position l und der Drehung Θ abhängig sind. Die Dynamik wird aber beeinflusst von den Lagewinkeln des Unterkörpers ϕ und des Oberkörpers ρ des SCD. Die Geschwindigkeiten bestimmen die Größe der Zentrifugal-, Coriolis- und Reibungseinflüsse.

Ruhelagen. Die Ruhelagen sind entscheidende Grenzbereiche des sich qualitativ ändernden Systemverhaltens. Die Funktionalität des SCD ist davon abhängig, ob und in welcher Weise die Ruhelagen erhalten werden können und in welcher Art ein Übergang von einer in die nächste Ruhelage erfolgen kann. Neben allen anderen Funktionsansprüchen ist das Erhalten eines balancierenden Verhaltens in S_1 sowie das Erhalten der Lage in S_3 von Interesse.

Ohne Einsatz eines entsprechenden Oberkörpermoments gibt es für das Modell des SCD im Zustand S_1 vier unterschiedliche Ruhelagekonfigurationen, die entsprechend der Lage des Oberkörpers bzw. Unterkörpers in Bezug auf die Gravitationslinien folgende Kombinationsmöglichkeiten aufweisen (Abb. 4.4): oben-oben, oben-unten, unten-oben und unten-unten. Mit Einsatz von entsprechenden Oberkörpermomenten können zeitlich beliebige, quasistationäre Übergänge zwischen diesen Ruhelagekonfigurationen entlang entsprechender Gleichgewichtslagen erfolgen. Zum praktischen Einsatz kommt aber lediglich die erste Kombination in einem Bereich des Unterkörpers von $\phi \approx \pm 2$ rad vor, bei der beide Elemente (Unterkörper und Oberkörper) in der Anzahl aller möglichen Winkelkonfigurationen überwiegend nach oben stehen. Deshalb wird auch nur diese Kombinationsmöglichkeit behandelt.

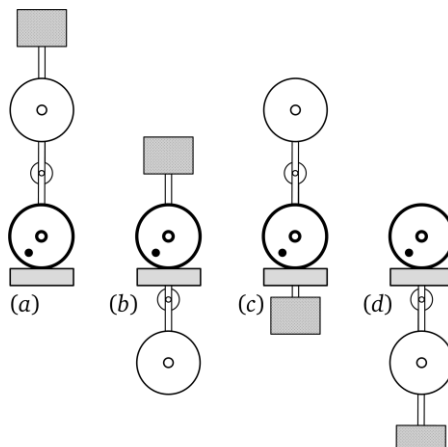


Abb. 4.4: Ruhelagekonfigurationen des SCD im Zustand S_1 .

Die Ruhelage wird aus dem Modell nach (4.78) für den diskreten Zustand S_1 , unter der Annahme, dass sämtliche Beschleunigungen und Geschwindigkeiten zu Null werden, ermittelt

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_1}}(\mathbf{v}_{S_1}, \mathbf{0}) = \mathbf{E}_{\mathbf{v}_{S_1}} \mathbf{i}_v. \quad (4.79)$$

Konkret nehmen die Elemente der Gleichung (4.79) folgende Werte an

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -g(M_B(H\sin(\rho+\phi) + L\sin(\phi)) + L(4m_{wd} + M)\sin(\phi)) \\ -gHM_B\sin(\rho+\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_m i_{long} i_{G,wh}}{R} \\ K_m i_{long} i_{G,wh} \\ K_m i_{body} i_{G,bd} \\ \frac{B_w K_m i_{yaw} i_{G,wh}}{R} \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Nach dem Lösen der Gleichung (4.80) erhält man die Werte der Aktorgrößen und der Lagen für den stationären Zustand. Offensichtlich müssen die Ströme, die für die Drehung des SCD und die longitudinale Bewegung verantwortlich sind, verschwinden. Nur der Strom i_{body} des Oberkörperaktors hält die Lagen des SCD abhängig von den Winkeln ϕ bzw. ρ

$$\begin{bmatrix} i_{long,0} \\ i_{yaw,0} \\ i_{body,0} \\ \rho_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{gL\sin(\phi_0)(M_B + 4m_{wd} + M)}{K_m i_{G,bd}} \\ \arcsin\left(\frac{-L(M_B + 4m_{wd} + M)\sin(\phi_0)}{HM_B}\right) - \phi_0 \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

Für jede Ruhelage muss also ein Verhältnis der beiden Oberkörperwinkel ϕ_0 und ρ_0 durch den Strom des Oberkörperantriebs $i_{body,0}$ gewährleistet sein, welcher graphisch in Abb. 4.5 dargestellt ist.

Die Gleichung der vierten Zeile der Matrixgleichung (4.81) wird als Ruhelagefunktion des Zusammenhangs der Winkel ρ und ϕ für die weitere Verwendung mit f_{bal} bezeichnet

$$\rho_0 = f_{bal}(\phi_0). \quad (4.82)$$

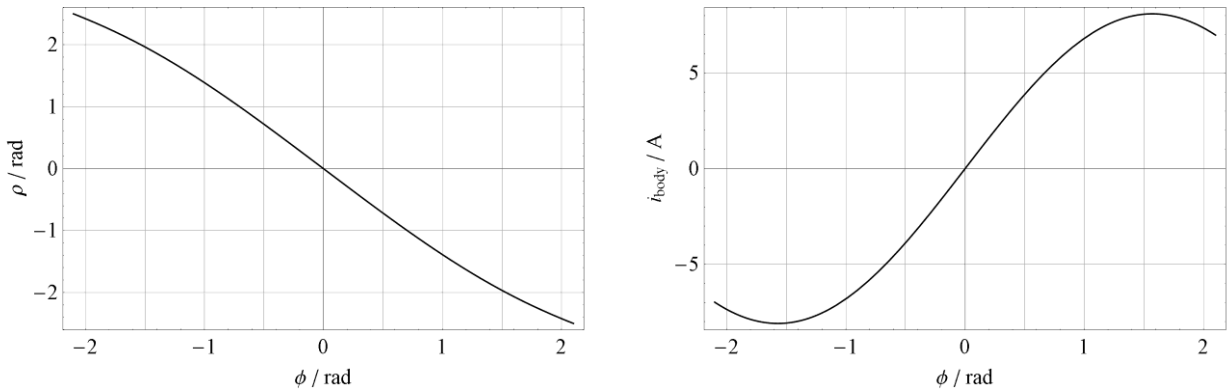


Abb. 4.5: Ruhelagekennlinie: Das Verhältnis des Oberkörperwinkels ρ_0 und des Unterkörperwinkels ϕ_0 und des SCD in den Ruhelagen (links). Der Strom des Oberkörperantriebs in Abhängigkeit vom Winkel ϕ_0 (rechts).

Die gleiche Berechnung kann auch für den diskreten Zustand S_3 vorgenommen werden. Da sich das SCD am Boden (aber im Allgemeinen nicht eben) mit beiden Radachsen befindet, kann der Oberkörperwinkel ρ_0 einen beliebigen Wert annehmen, soweit er sich noch im S_3 befindet. Der Unterschied zum stationärem Zustand im S_1 (4.81) liegt im Wert für den Strom des Oberkörperantriebs

$$\begin{bmatrix} i_{long,0} \\ i_{yaw,0} \\ i_{body,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{gHM_B \sin(\rho_0 + \phi_0)}{K_m i_{G,bd}} \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

4.2 Diskontinuierliche Dynamik

Die diskontinuierliche Dynamik des SCD wird durch den Übergang zwischen den vier erwähnten diskreten Zuständen S_0 bis S_3 ausgelöst.

Das Aktivieren eines Kontakts löst einen Stoß aus und abhängig von der Eigenschaft des Stoßes sind in einem stationären Zustand folgende Übergänge zu erwarten:

- Übergang $S_0 \rightarrow S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$,
- Übergang $S_1 \oplus S_2 \rightarrow S_3$.

Das Auflösen des Kontakts geschieht augenblicklich und dabei sind folgende stationäre Übergänge möglich:

- Übergang $S_3 \rightarrow S_1 \oplus S_2$. Der Zustand S_0 ist im stationären Fall nicht möglich, weil das SCD nach einer gewissen Zeit unter Einfluss der konstanten Gravitation immer zum Boden zurückkehrt.

Die Abstände des Vektors \mathbf{g}_N entsprechen den kinematisch verknüpften Größen während eines aktiven Kontakts:

$$\mathbf{g}_N = [g_{N,1} \quad g_{N,2} \quad g_{N,3} \quad g_{N,4}]^T, \quad (4.84)$$

In unterschiedlichen diskreten Zuständen S_i sind nur einzelne Komponenten kinematisch verknüpft und die restlichen bleiben frei. Daher ist der zustandsabhängige Vektor \mathbf{g}_N unterschiedlich in unterschiedlichen Zuständen S_i und beinhaltet kinematisch verknüpfte Größen in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{N,S_0} &= \emptyset, \\ \mathbf{g}_{N,S_1} &= [g_{N,1} \quad g_{N,2} \quad g_{N,3}]^T, \\ \mathbf{g}_{N,S_2} &= [g_{N,4}]^T, \\ \mathbf{g}_{N,S_3} &= [g_{N,1} \quad g_{N,2} \quad g_{N,3} \quad g_{N,4}]^T. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Bei den Komponenten $g_{N,1}$ und $g_{N,2}$ handelt es sich dabei um die x - bzw. y -Komponente des SCD, deren Werte nur in den Zuständen S_1 und S_3 mit der Drehung der Räder $\alpha_{l,b}$ und $\alpha_{r,b}$ kinematisch

verknüpft sind. Für die Bedingung der Stöße sind die Komponenten $g_{N,3}$ und $g_{N,4}$ (Abb. 4.6), welche eigentlich der Höhe der einzelnen Radachsen über dem Boden entsprechen, entscheidend:

$$\begin{aligned} g_{N,3} &= {}^a z_b - R \\ g_{N,4} &= {}^a z_b + 2L \cos \phi - R - \delta_{st} \end{aligned} \quad (4.86)$$

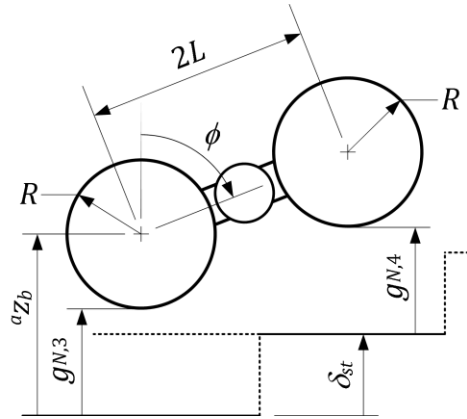


Abb. 4.6: Kontaktaufnahme mit vorderer bzw. hinterer Radachse. Bei der Modellierung der Stufen werden nur die vollen Linien in Betrachtung genommen.

Bei aktivem Kontakt der Hinterräder S_1 ist die Komponente $g_{N,3} = 0$ kinematisch verknüpft und bei aktivem Kontakt der Vorderräder S_2 ist die Komponente $g_{N,4} = 0$ kinematisch verknüpft. Im Fall eines aktiven Kontakts aller Räder S_3 sind beide Komponenten kinematisch verknüpft.

Im Folgenden werden die diskontinuierlichen Ereignisse in der Reihenfolge ihres Auftretens bei typischen Bewegungsabläufen des SCD, wie bereits in Abb. 2.3 gezeigt, betrachtet.

4.2.1 Stoß und Kontaktaufnahme

Stoß. Bei der Bewegung des SCD entstehen Stöße im Zeitpunkt t_A als unvermeidlich, wenn die Grenze des Bodens erreicht wird. Dabei wird der potentielle²⁴ Übergang zu den drei beschriebenen diskreten Zuständen, S_1 , S_2 und S_3 unterschieden.

Für Simulationszwecke ist es zunächst wichtig, die Zeitpunkte, zu denen Stöße auftreten, zu identifizieren. Wenn die Distanzen zum Boden $g_{NA,3}$ bzw. $g_{NA,4}$ zu Null werden und sich gleichzeitig die zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{g}_{NA,3}$ bzw. $\dot{g}_{NA,4}$ verkleinern, wird der entsprechende Stoß im dazugehörigem Zeitpunkt t_A ermittelt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A,S_1} &:= g_{NA,3} = 0 \wedge \dot{g}_{NA,3} < 0, \\ \mathcal{I}_{A,S_2} &:= g_{NA,4} = 0 \wedge \dot{g}_{NA,4} < 0, \\ \mathcal{I}_{A,S_3} &:= g_{NA,3} = 0 \wedge \dot{g}_{NA,3} < 0 \wedge g_{NA,4} = 0 \wedge \dot{g}_{NA,4} < 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Die logischen Variablen \mathcal{I}_{A,S_1} , \mathcal{I}_{A,S_2} und \mathcal{I}_{A,S_3} , $\mathcal{I}_{A,S_i} \in \{true, false\}$, kennzeichnen die Bedingung zum jeweilig auftretenden Stoß.

²⁴ Der Übergang ist potentiell, weil er nur in dem Fall stattfindet, wenn die entsprechende Normalgeschwindigkeit nach dem Stoß gleich Null ist.

Nachdem eine bestimmte Stoßsituation \mathcal{I}_{A,S_i} festgestellt wurde, folgt die Bestimmung der Geschwindigkeiten des SCD in die Normalrichtung des Stoßes. Dazu werden die Geschwindigkeiten der abhängigen Koordinaten im Zeitpunkt des Stoßes $\dot{\mathbf{q}}(t_A) = \dot{\mathbf{q}}_A$ durch die Transformationsmatrix $\Phi_{\mathbf{q},S_i}$ in die zur Stoßbetrachtung benötigte Form gebracht

$$\dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i} = \Phi_{\mathbf{q},S_i} \dot{\mathbf{q}}_A. \quad (4.88)$$

Danach folgt die Berechnung der Rückstoßgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i}$

$$\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i} = -\epsilon_N \dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i}. \quad (4.89)$$

Diese Geschwindigkeiten sind mit der Matrix der Stoßzahlen ϵ_N bestimmt, welche in dem Fall mit einer Diagonalmatrix beschrieben ist

$$\epsilon_N = \text{diag}(0, 0, \epsilon_{N,3}, \epsilon_{N,4}). \quad (4.90)$$

Die ersten beiden Stoßzahlen entsprechen den Geschwindigkeiten $\dot{g}_{NA,1}$ und $\dot{g}_{NA,2}$, welche die relativen Geschwindigkeiten zwischen dem Boden und dem SCD in x - bzw. y -Richtung darstellen. Bei der Stoßbetrachtung ist das Geschehen in x - bzw. y -Richtung des SCD von untergeordnetem Interesse, weil angenommen werden kann, dass die Zustandsübergänge mit kleinen Geschwindigkeiten stattfinden. Deshalb sind die entsprechenden ersten beiden Stoßzahlen zu Null gesetzt, was einem plastischen Stoß entspricht. Somit haben die relativen Rückstoßgeschwindigkeiten in die x - ($\dot{g}_{NE,1}$) bzw. y -Richtung ($\dot{g}_{NE,2}$) auch den Wert Null. Die physikalische Bedeutung dessen ist, dass beim Erreichen des Zustands S_1 oder S_3 :

- eine laterale Geschwindigkeit des SCD beim Entstehen des Stoßes $v_{lat}(t_A)$ nach dem Stoß zu Null wird $v_{lat}(t_E) = 0$ und
- eine longitudinale Geschwindigkeit des SCD beim Entstehen des Stoßes $v_{long}(t_A)$ nach dem Stoß $v_{long}(t_E) \neq 0$ durch die Rollbedingung der Räder mit Einbeziehen des Erhaltungssatzes der Impulse teilweise erhalten bleibt.

Aus den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß können die Kraftstöße berechnet werden

$$\Lambda_{N,S_i} = (\Phi_{\mathbf{q},S_i} \mathbf{H}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_A)^{-1} \Phi_{\mathbf{q},S_i}^T)^{-1} (\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i} - \dot{\mathbf{g}}_{NA,S_i}). \quad (4.91)$$

Die Kraftstöße bestehen, entsprechend der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{g}}_{N,S_i}$ abhängig vom Zustand S_i aus unterschiedlichen Elementen:

$$\begin{aligned} \Lambda_{N,S_1} &= [\Lambda_{N,1} \quad \Lambda_{N,2} \quad \Lambda_{N,3}]^T, \\ \Lambda_{N,S_2} &= [\Lambda_{N,4}]^T, \\ \Lambda_{N,S_3} &= [\Lambda_{N,1} \quad \Lambda_{N,2} \quad \Lambda_{N,3} \quad \Lambda_{N,4}]^T. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Im Fall von potentiellen Übergängen zu den Zuständen S_1 und S_2 (einfache Kontakte) kann weiter zur Berechnung der Geschwindigkeiten der abhängigen Koordinaten $\dot{\mathbf{q}}(t_E) = \dot{\mathbf{q}}_E$ (4.93) übergegangen werden. Falls ein potentieller Übergang zum Zustand S_3 mit mehrfachem Kontakt auftritt, muss die Kontaktsituation durch Bewertung der Kraftstöße nach einem entsprechendem Algo-

rithmus (dargestellt im Anhang B.9, Alg. B.1) plausibilisiert werden. Dieser Algorithmus prüft, ob einer der im mehrfachen Kontakt stehenden Kraftstöße $\Lambda_{N,3}$ und $\Lambda_{N,4}$ negativ ist, was auf dessen Redundanz hindeutet. Falls dies der Fall ist, werden die Kraftstöße erneut berechnet unter der geänderten Annahme, dass ausschließlich nicht-negative Kontaktstöße auftreten.

Der nächste Schritt ist die Berechnung der Geschwindigkeiten der abhängigen Koordinaten $\dot{\mathbf{q}}_E$

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \dot{\mathbf{q}}_A + \mathbf{H}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_A)^{-1} \Phi_{\mathbf{q},S_i}^T \Lambda_{N,S_i}. \quad (4.93)$$

Aus (4.93) ist ersichtlich, dass sich die Geschwindigkeit vor dem Stoß $\dot{\mathbf{q}}_A$ sprunghaft auf den Wert $\dot{\mathbf{q}}_E$ ändert. Dies ist durch die Impulsänderung bedingt, abhängig vom Kraftstoß Λ_{N,S_i} und der Konfigurationslage. In der abgekürzten Schreibweise wird die Berechnung der Geschwindigkeit nach dem Stoß in folgender Weise bezeichnet

$$\dot{\mathbf{q}}_E = \dot{\mathbf{q}}_A + \Delta(\mathbf{q}_A, \Lambda_{N,S_i}) = \dot{\mathbf{q}}_A + \Delta_{A,S_i}. \quad (4.94)$$

Die Geschwindigkeit nach dem Stoß wird auf diesen Neuberechneten Wert $\dot{\mathbf{q}}_E$ gesetzt.

Entweder Kontaktaufnahme oder Abprall. Ob es nach dem Stoß zu einem Abprall kommt oder ob es unmittelbar nach dem Stoß zur Kontaktaufnahme mit dem Boden (Aktivierung) kommt, hängt von den Rückstoßgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{g}}_{NE,S_i}$ ab. Dabei sind die Geschwindigkeitskomponenten der Radachsenhöhen $\dot{g}_{NE,3}$ und $\dot{g}_{NE,4}$ entscheidend. An dieser Stelle werden zunächst die logischen Variablen definiert, welche erfüllt sein müssen, damit nach dem Stoß ein Abprall erfolgt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{E,S_1} &:= \dot{g}_{NE,3} > 0, \\ \mathcal{J}_{E,S_2} &:= \dot{g}_{NE,4} > 0, \\ \mathcal{J}_{E,S_3} &:= \dot{g}_{NE,3} > 0 \wedge \dot{g}_{NE,4} > 0. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Demgegenüber stellen folgende logische Variablen die Bedingungen zur Kontaktaufnahme dar

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{A,S_1} &:= \dot{g}_{NE,3} = 0, \\ \mathcal{C}_{A,S_2} &:= \dot{g}_{NE,4} = 0, \\ \mathcal{C}_{A,S_3} &:= \dot{g}_{NE,3} = 0 \wedge \dot{g}_{NE,4} = 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Wie die Übergänge nacheinander erfolgen und wie die Wechselwirkung der zeitkontinuierlichen und diskontinuierlichen Dynamik sich abwickelt, wird im Kapitel 4.3 beschrieben.

4.2.2 Abheben

Das Auflösen der Kontakte führt zum Abheben des SCD. Während das Abheben der einzelnen Radachsen ein Teil der Funktionalität ist und beim Steigen der Treppen das abwechselnde Abheben zur Normalbewegung dazugehört, ist das gleichzeitige Abheben beider Radachsen nicht erwünscht. Im Modell werden jedoch alle drei Möglichkeiten in Betrachtung genommen, um die Funktionalität bezüglich des Abhebens in Simulation prüfen zu können.

Um das Abheben zu detektieren, ist eine Bewertung der Bindungskräfte λ_{S_i} aus dem Modell in abhängigen Koordinaten (4.59) notwendig. Der Vektor beinhaltet zustandsabhängige, in die Normalrichtung wirkende Bindungskräfte

$$\begin{aligned}\lambda_{S_0} &= \emptyset, \\ \lambda_{S_1} &= [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T, \\ \lambda_{S_2} &= [\lambda_4]^T, \\ \lambda_{S_3} &= [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]^T.\end{aligned}\tag{4.97}$$

Die Bindungskräfte λ_1 und λ_2 entsprechen den beidseitigen (bilateralen) Kräften in x - bzw. y -Richtung der Bewegung des SCD während des Kontakts der Hinterräder mit dem Boden. Diese Kräfte können in Betrachtung genommen werden, um zu prüfen, ob die Bedingungen zum Verhindern des Durchrutschens nicht verletzt werden. Die Zustandsänderungen, die in der Realität in dem Fall auftreten würden, sind im Modell nicht enthalten, stellen aber kein Hindernis zur Erfüllung der Funktionalität des SCD dar, weil sie vermieden werden können.

Um das Abheben des SCD feststellen zu können, sind die Komponenten λ_3 und λ_4 entscheidend. Dies sind einseitige (unilaterale) Kontaktkräfte zwischen SCD und Boden. Da bei diesen Kontaktkräften physikalisch nur positive Kräfte möglich sind, ist ein Übergang zu negativen Werten eine Bedingung für das Abheben des SCD, was auch die Änderung des diskreten Zustandes S_i kennzeichnet

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{E,S_1} &:= \lambda_3 = 0 \wedge \dot{\lambda}_3 < 0, \\ \mathcal{C}_{E,S_2} &:= \lambda_4 = 0 \wedge \dot{\lambda}_4 < 0, \\ \mathcal{C}_{E,S_3} &:= \lambda_3 = 0 \wedge \dot{\lambda}_3 < 0 \wedge \lambda_4 = 0 \wedge \dot{\lambda}_4 < 0.\end{aligned}\tag{4.98}$$

Die Zustandsänderungen durch das Abheben sind im konkreten Fall durch die Bedingungen \mathcal{C}_{E,S_1} , \mathcal{C}_{E,S_2} oder \mathcal{C}_{E,S_3} gekennzeichnet. Bei diesen Zustandsänderungen treten keine sprunghaften Änderungen der Geschwindigkeiten auf.

4.3 Hybride Dynamik

Die hybride Dynamik setzt sich zusammen aus der im Kapitel 4.1 beschriebenen zeitkontinuierlichen Dynamik des SCD, der im Kapitel 4.2 beschriebenen diskontinuierlichen Dynamik und deren Wechselwirkung. Eine kompakte Darstellung der hybriden Dynamik ist in Abb. 4.7 mit einem hybriden Zustandsautomat (*hybrid automaton*) dargestellt.

Der Anfangszustand des SCD ist in der Abb. 4.7 als S_3 gekennzeichnet, weil dies in der Realität stets der Fall ist.

Im Folgenden wird das Verhalten der hybriden Dynamik des SCD, der Reihe nach beginnend aus unterschiedlichen diskreten Zuständen, beschrieben.

Ausgangspunkt S_0 . Befindet sich das SCD im S_0 , im kontaktlosen Zustand (Abb. 4.7), erreicht es mit einer oder beiden Radachsen den Boden und es wird ein Stoß ausgelöst ($\mathcal{I}_{A,S_1} \oplus \mathcal{I}_{A,S_2} \oplus \mathcal{I}_{A,S_3}$).

Sind die Abprall-Geschwindigkeiten positiv (J_{E,S_3}), prallt das SCD ab und befindet sich erneut im kontaktlosen Zustand S_0 . Die *Guard-Funktion*²⁵ für den Übergang $S_0 \rightarrow S_0$ lautet

$$\mathcal{G}_{0 \rightarrow 0} = (\mathcal{I}_{A,S_1} \oplus \mathcal{I}_{A,S_2} \oplus \mathcal{I}_{A,S_3}) \wedge \mathcal{I}_{E,S_3}. \quad (4.99)$$

Dabei wird die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}_E$ bei jedem Stoß nach der *Reset-Funktion* ($i = 0$)

$$\mathcal{R}_{0 \rightarrow i} = \dot{\mathbf{q}}_E := \dot{\mathbf{q}}_A + \Delta_{A,S_i}, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (4.100)$$

zurückgestellt.

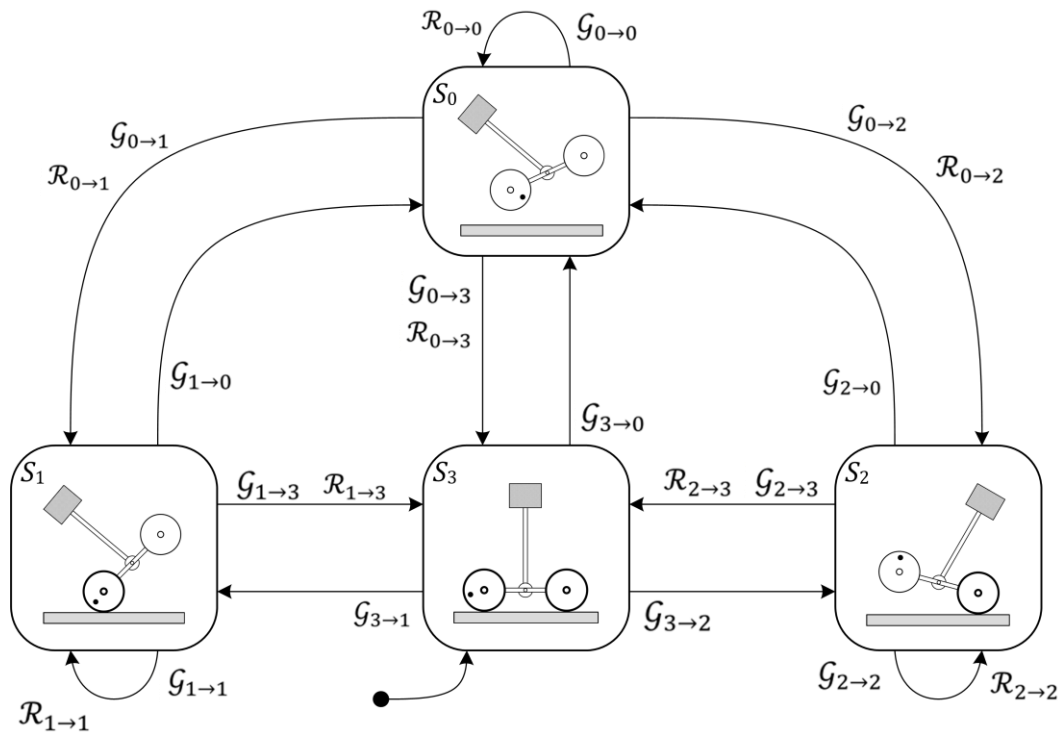


Abb. 4.7: Kompakte Darstellung des hybriden dynamischen Modells des SCD als hybrider Zustandsautomat.

Falls eine der Normalgeschwindigkeiten zum Boden ($\dot{g}_{NE,3}$, $\dot{g}_{NE,4}$) Null wird, erfolgt einer der Zustandsübergänge $S_0 \rightarrow S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$, entsprechend der *Guard-Funktionen*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{0 \rightarrow 1} &= \mathcal{I}_{A,S_1} \wedge \mathcal{C}_{A,S_1}, \\ \mathcal{G}_{0 \rightarrow 2} &= \mathcal{I}_{A,S_2} \wedge \mathcal{C}_{A,S_2}, \\ \mathcal{G}_{0 \rightarrow 3} &= (\mathcal{I}_{A,S_1} \oplus \mathcal{I}_{A,S_2} \oplus \mathcal{I}_{A,S_3}) \wedge \mathcal{C}_{A,S_3}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Durch die Bedingung für die Kontaktaufnahme \mathcal{C}_{A,S_i} wird ein Kontakt mit dem Boden aufgenommen und das SCD bewegt sich dementsprechend im Zustand S_i . Während die Zustandsübergänge $S_0 \rightarrow S_1$ und $S_0 \rightarrow S_2$ eindeutig sind, kann der Zustandsübergang $S_0 \rightarrow S_3$ nicht nur durch den Stoß

²⁵ Der Begriffe *Guard*- und *Reset*-Funktion sind im Kapitel 2.3 beschrieben.

\mathcal{I}_{A,S_3} ausgelöst werden, sondern auch durch einen der anderen Stöße \mathcal{I}_{A,S_1} oder \mathcal{I}_{A,S_2} . Ist die Bedingung zur Kontaktaufnahme \mathcal{C}_{A,S_3} erfüllt, tritt Zustand S_3 ein.

Der Zustand S_0 des SCD kann in der Realität dann vorkommen, wenn das SCD z.B. von einer Stufe fällt oder durch eine hochdynamische Bewegung, bei der beide Radachsen abheben.

Analog dieser Beschreibung des Ausgangspunktes S_0 können auch die Ausgangspunkte S_1 , S_2 und S_3 beschrieben werden. Dabei werden nur die Aspekte beschrieben, die sich qualitativ vom Zustand S_0 unterscheiden.

Ausgangspunkt S_1 und S_2 . Der Unterschied zwischen diesen beiden Zuständen ist, dass im S_1 die Hinterräder angetrieben sind und dadurch unmittelbar eine Stabilisierung sowie Regelung der Lage des SCD ermöglicht wird.

Guard-Funktionen

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{1 \rightarrow 3} &= \mathcal{I}_{A,S_2} \wedge \mathcal{C}_{A,S_3}, \\ \mathcal{G}_{2 \rightarrow 3} &= \mathcal{I}_{A,S_1} \wedge \mathcal{C}_{A,S_3}, \\ \mathcal{G}_{i \rightarrow 0} &= \mathcal{C}_{E,S_i}.\end{aligned}\tag{4.102}$$

Ein Abheben des SCD entsprechend dem Zustandsübergang $S_i \rightarrow S_0$, $i \in \{1,2\}$ ist erreicht, wenn die Normalkraft zum Boden verschwindet ($\mathcal{G}_{i \rightarrow 0}$). Das geschieht entweder, wenn der Boden unter den Rädern verlorenght, z.B. beim Fallen von einer Stufe oder bei einer entsprechenden Bewegung mit ausreichend hoher Dynamik.

Bei jedem Eintritt in einen neuen Zustand S_i erfolgt das Rücksetzen der Geschwindigkeiten durch die entsprechende *Reset*-Funktion äquivalent zu (4.100) $\mathcal{R}_{i \rightarrow 3} = \mathcal{R}_{0 \rightarrow i}$ mit $i \in \{1,2\}$.

Ausgangspunkt S_3 . Befindet sich das SCD mit allen Rädern am Boden, sind die Zustandsübergänge $S_3 \rightarrow S_0 \oplus S_1 \oplus S_2$ durch Abheben möglich. Das Auflösen beider Kontakte $\mathcal{G}_{3 \rightarrow 0} = \mathcal{C}_{E,S_3}$ ist nur durch eine mit ausreichend hoher Dynamik geführten Bewegung möglich. Das Auflösen von nur einem Kontakt ist gekennzeichnet mit $\mathcal{G}_{3 \rightarrow 1} = \mathcal{C}_{E,S_2}$ und $\mathcal{G}_{3 \rightarrow 2} = \mathcal{C}_{E,S_1}$. Im Speziellen ist der Übergang $S_3 \rightarrow S_1$ ein Teil der üblichen Bewegung beim Steigen der Treppe.

Beim Auflösen der Kontakte gibt es keine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeiten. Die *Reset*-Funktionen führen keine Änderung $\mathcal{R}_{3 \rightarrow i} := \dot{\mathbf{q}}_E := \dot{\mathbf{q}}_A$, $i \in \{0,1,2\}$ herbei und werden deshalb in der (Abb. 4.7) ausgelassen.

4.3.1 Aufbau der Simulation

Nachdem die hybride Dynamik in der kompakten Form eines hybriden Zustandsautomaten vorgestellt wurde (Abb. 4.7), wird hier auf die Implementierung dieser Dynamik zu Simulationszwecken eingegangen. Eine Darstellung des Prinzips der Implementierung der hybriden Dynamik des SCD ist in der Abb. 4.8 dargestellt.

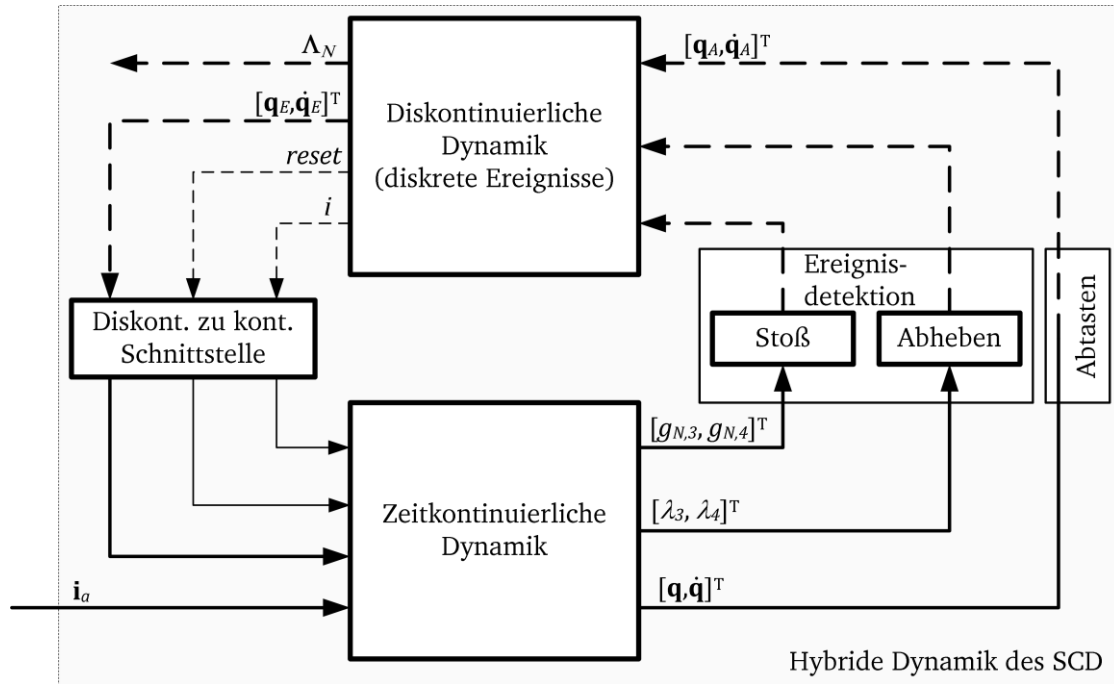


Abb. 4.8: Hybride Dynamik des SCD aus Sicht der Simulation. Durchgezogene Linien stellen die zeitkontinuierlichen Signale dar und gestrichelte Linien stellen diskontinuierliche Signale dar.

Zeitkontinuierliche Dynamik. Die zeitkontinuierliche Dynamik ist in *Matlab/Simulink* implementiert. Die Basis für die Implementierung ist die zusammengesetzte Matrixgleichung (4.59). Die explizite analytische Lösung dieser Gleichung in *Mathematica* ist zwar möglich, jedoch führt das gelieferte Ergebnis wegen der erheblichen Größe zu einer signifikanten Erhöhung der Simulationsdauer. Deshalb wird dieses System numerisch gelöst.

Die erste Zeile der zusammengesetzten Matrixgleichung (4.59) stellt das Differenzialgleichungssystem der Kinetik und die zweite Zeile stellt das implizite algebraische Gleichungssystem der Bindungen dar. Da unter *Simulink* differential-algebraische Gleichungen (DAE) nicht direkt gelöst werden können, wird in [67] eine indirekte Lösung des Problems vorgeschlagen, welche in jedem Integrationsschritt das algebraische System mit Anwendung des Blocks *Algebraic Constraint* löst. Die erhaltene Lösung des Vektors λ_{S_i} , wird in das Differenzialgleichungssystem eingeführt, welches nach dem Invertieren der Trägheitsmatrix \mathbf{H}_{q_m} explizit die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}}$ liefert. Diese Beschleunigungen werden zweifach integriert, um die Geschwindigkeiten und Positionen zu erhalten und somit schließt sich der Signalfuss.

Die zeitkontinuierliche Dynamik ist in Abb. 4.8 als ein Block dargestellt und stellt einen Bestandteil der hybriden Dynamik dar. Im Ausgang dieses Blocks werden die notwendigen Signale für die Zusammensetzung mit der diskontinuierlichen Dynamik geliefert:

- Der zeitkontinuierliche Zustandsvektor $[\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}}]^T$,
- die Normalkräfte zum Boden $[\lambda_3 \quad \lambda_4]^T$ und
- die Distanzen zum Boden $[g_{N,3} \quad g_{N,4}]^T$.

Als Eingänge in die zeitkontinuierliche Dynamik aus der diskontinuierlichen Dynamik wirken:

- Der diskrete Zustandsindex i , welcher dem diskreten Zustand S_i entsprechend die richtige zeitkontinuierliche Dynamik wählt,
- die berechneten Geschwindigkeiten und Positionen nach einem Stoß $[\mathbf{q}_E \quad \dot{\mathbf{q}}_E]^T$, die neu gesetzt werden müssen und
- das Signal *reset*, welches nach einem Stoß die Integratoren der zeitkontinuierlichen Dynamik auf neu berechnete Werte setzt.

Schnittstellen. Die Schnittstelle der diskontinuierlichen Dynamik (Abb. 4.8) fügt den Variablen dieses Blocks den zeitlichen Charakter hinzu, indem sie die entsprechenden Werte dieser Variablen dem Block der zeitkontinuierlichen Dynamik in jedem Rechenschritt zur Verfügung stellt.

Die Schnittstelle der zeitkontinuierlichen Dynamik zu der diskontinuierlichen Dynamik besteht hauptsächlich aus der Ereignisdetektion. Als Ereignisse zählen die Stöße und das Auflösen der Kontakte durch das Abheben. Zudem werden die kontinuierlichen Zustandsvariablen zur Verfügung gestellt. Die Unterblöcke „Stoß“ und „Abheben“ in Abb. 4.8 bestehen aus logischen Elementblöcken und zum Detektieren eines Nulldurchgangs wird der *Simulink*-Block *Hit Crossing* verwendet. Der Block „Stoß“ überprüft die Kriterien (4.87) und der Block „Abheben“ die Kriterien (4.98).

Diskontinuierliche Dynamik. Diese Dynamik ist ereignisgesteuert als Zustandsautomat (*state machine*) in *Stateflow* realisiert. Die bestimmten diskreten Zustände werden grafisch, ähnlich der Darstellung in Abb. 4.7, implementiert, jedoch wird hier lediglich die diskontinuierliche Dynamik mit den zugehörigen Größen nach den Gleichungen (4.88) bis (4.94) bestimmt. Die zeitkontinuierliche Dynamik läuft, wie bereits beschrieben in *Simulink*, gekennzeichnet in der Abb. 4.8, mit dem Block „Zeitkontinuierliche Dynamik“. Zusätzlich zur Bestimmung der diskontinuierlichen Größen (Kraftstöße und Geschwindigkeiten) wird im Fall eines Stoßes abhängig von der Abprall-Geschwindigkeit anhand (4.95) bzw. (4.96) bestimmt, ob es zur einer Kontaktaufnahme kommt (Aktivierung).

Numerische Aspekte. Um die hybride Dynamik des SCD in *Matlab/Simulink/Stateflow* nach dem Prinzip in Abb. 4.8 zu implementieren, mussten einige numerische Aspekte berücksichtigt werden.

Entscheidend für die Plausibilität der Simulation der hybriden Dynamik des SCD ist die Detektion der Ereignisse. Zu Ereignissen gehören hier die Stöße sowie das Aufheben eines Kontakts. In der Simulationszeit bis zu einem Ereignis ist eine zeitkontinuierliche Dynamik S_i aktiv. Beim Ereignis ändert sich möglicherweise die Struktur des betrachteten Systems $S_i \rightarrow S_j$ und die Anfangswerte \mathbf{q}_E werden, bedingt durch die diskontinuierliche Dynamik, neu gesetzt. Wie beschrieben, wurde, um die Ereignisse in *Simulink* zu detektieren, der Block *Hit Crossing* verwendet. Somit wird der Nulldurchgang (*zero-crossing detection*) der Größen (4.87) bzw. (4.98) ermittelt. Im Prinzip funktioniert die Ermittlung des Nulldurchgangs so, dass zunächst bei der betrachteten Größe eine Vorzeichenänderung festgestellt wird [68]. Wenn eine Vorzeichenänderung festgestellt wurde, startet der Nulldurchgangsalgorithmus die Suche nach der präzisen Nulldurchgangszeit.

Aus dieser Tatsache folgt, dass numerische Lösungsalgorithmen mit einer konstanten Schrittweite nicht geeignet sind. Es ist unwahrscheinlich, dass die Nulldurchgangszeit mit der konstanten Schrittweite übereinstimmen würde.

Die Suche nach der Nulldurchgangszeit ist in *Simulink* nicht ohne weiteres fehlerfrei möglich [68]. Es stehen ein adaptiver und ein nichtadaptiver Algorithmus sowie zusätzliche Optionen²⁶ zur Verfügung, um die Nulldurchgangssuche anzupassen. Hier wurde der adaptive Algorithmus verwendet (`ZeroCrossAlgorithm = 'Adaptive'`), weil er die Genauigkeit verbessert und die aufeinanderfolgenden fehlerhaften Nulldurchgangsdetektionen vermindert [68]. Zusätzlich wurde die Signalschwelle für die Nulldurchgangsdetektion verringert (`ZcThreshold = '0.001'`), was die Genauigkeit der ermittelten Nulldurchgangszeit auf Kosten der Simulationsdauer erhöht.

Es wurde festgestellt, dass die Plausibilität der Simulationen auch von dem verwendeten Gleichungslöser (*solver*) abhängig ist. Hier wird der Löser `ode15s` hervorgehoben, welcher präzisere Ergebnisse auf Kosten der Simulationsdauer lieferte und der Löser `ode23`, welcher schneller, aber in einigen Fällen doch zu falschem Ergebnis kam. Weitere Simulationsoptionen, die variiert wurden, sind: die maximale Schrittweite (`MaxStep`), die auf 0.005 s eingestellt wurde, sowie der relative Fehler, der im Bereich von 1×10^{-3} bis 1×10^{-5} eingestellt wurde.

Trotz allem konnte kein eindeutiger Simulationsparametersatz für alle simulierten Szenarios (Simulationsfälle) gefunden werden, um durchgehend glaubhafte Simulationsergebnisse zu erzielen.

Weiterhin wird auf einige numerische, aber auch systemtechnische Ursachen der Problematik beim Simulieren des SCD eingegangen.

Wie im Kapitel 2.3 beschrieben, müssen bei hybriden Systemen mit elastischen Stößen in der Simulation Maßnahmen getroffen werden, um das *Zeno*-Verhalten ab einer gewissen Schwelle abubrechen. Aus diesem Grund müssen die als ideal betrachteten Bedingungen für die Kontaktaufnahme (4.96) bzw. den Abprall (4.95) modifiziert werden. Statt mit Null werden die Vergleiche mit einem bestimmten positiven Wert gemacht. Somit ändern sich die Bedingungen für die Kontaktaufnahme (4.96) zu $|\dot{g}_{NE,j}| \leq \varepsilon_{\dot{g}}, \varepsilon_{\dot{g}} \in \mathbb{R}, j \in \{3,4\}$ und dementsprechend auch die Ausdrücke (4.95). In den Simulationen wurde der Wert $\varepsilon_{\dot{g}} = 0.1$ m/s verwendet.

Wegen aller genannten Ursachen der Abweichung des verwendeten hybriden Modells von der idealisierten Betrachtung der hybriden Dynamik nach Abb. 4.7, werden die neugesetzten Werte bei einer Kontaktaufnahme, beschrieben nach (4.94), leicht korrigiert. Der entsprechende Algorithmus Alg. B.2 ist im Anhang B.9 gegeben.

Bei Betrachtung der hybriden Dynamik nach Abb. 4.7 wird beim Eintritt in einen neuen Zustand S_i nur das Rücksetzen der Geschwindigkeiten \mathbf{q}_E betrachtet. Die Positionen \mathbf{q}_E wurden nicht rückgesetzt, daher galt $\mathbf{q}_E = \mathbf{q}_A$, was physikalisch korrekt ist. In der Implementierung musste jedoch wegen der beschriebenen Fehlerquellen eine leichte Korrektur erfolgen, welche mit dem Alg. B.3. realisiert wurde (Anhang B.9).

²⁶ Bezieht sich auf die Optionen der *Matlab* Funktion `sim`. Der nichtadaptive Algorithmus ist als Standardeinstellung wegen der Rückwärtskompatibilität mit älteren *Matlab* Versionen eingestellt [68].

4.4 Analyse

Eine Beschreibung des Verhaltens des SCD, dargestellt als HDS mit dem hybriden Zustandsautomaten, wurde im Kapitel 4.3 gegeben.

Eine Analyse des Systems anhand des Modells ist wegen im Allgemeinen mangelnder analytischer Methoden für HDS, wie schon im Kapitel 2.3 nach [30] beschrieben, nicht durchführbar. Deshalb wurde das System anhand von Simulationen analysiert.

Um ein breiteres Abbild des gesamten Verhaltens zu erhalten und um das Modell zu plausibilisieren, ist eine hohe Anzahl von Simulationen notwendig. Hier tragen die Erfahrung aus dem Betrieb des realen SCD und das Ausschließen physikalisch nicht sinnvoller Simulationsergebnisse zur Plausibilisierung des Modells bei. Die Anzahl aller möglichen Simulationsfälle ist aufgrund unterschiedlicher Anfangszustände und Parametervariationen enorm. Mit den durchgeführten Simulationsfällen wurden fast alle Zustandsübergänge des hybriden Zustandsautomaten in der Abb. 4.7 simuliert. Lediglich die Übergänge zum Zustand ohne Bodenkontakt $S_i \rightarrow S_0$, $i \in \{1,2,3\}$, ausgelöst durch die *Guard*-Funktionen \mathcal{C}_{E,S_1} , \mathcal{C}_{E,S_2} und \mathcal{C}_{E,S_3} , kamen hier in antriebslosen Fällen nicht zustande. Diese entsprechen dem Auflösen der einzelnen oder beider Kontakte zum Boden, welche durch sehr dynamische Vorgänge ausgelöst werden können. Unter Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzungen der ausgewählten Aktoren ist dies nicht realistisch und gehört nicht zur grundlegenden Funktionalität des SCD. Einige in der Praxis vorkommende Fälle werden zur Analyse der Regelung in Kapitel 5 behandelt. Somit sind die Existenz und die Eindeutigkeit der Simulationslösungen in den praxistauglichen Situationen geprüft. Ein Beispiel eines Simulationsfalles ist im Anhang B.10 gegeben. Aus den durchgeführten Simulationsfällen können im Folgenden beschriebene Schlüsse gezogen werden.

Das SCD ohne Ansteuerung ist ein passives mechanisches System, welches unter Einfluss der Erdgravitation steht. Um diese Wirkung auszunutzen, beginnen die Simulationen daher in einem kontaktlosen Zustand mit einem Anfangszustand der SCD-Lage oberhalb des Bodens. Nach Einwirkung der Gravitation fällt das SCD zum Boden und es entfalten sich je nach Fall unterschiedliche diskrete Zustände, welche aber in der Regel mit dem Zustand S_3 enden und zwar mit der Lage des Oberkörpers nach unten.

4.5 Fazit

Das SCD wurde als ein hybrides dynamisches System modelliert. Es beinhaltet vier diskrete Zustände S_i , $i \in \{0,1,2,3\}$, welche sich situationsabhängig (nach Entstehen oder Auflösen der Bodenkontakte) abwechseln.

Jeder dieser vier diskreten Zustände ist mit einem kontinuierlichen Modell in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} (4.59) mit unterschiedlichen Bindungen (Bindungsmatrizen $\Phi_{\mathbf{q},S_i}$) bestimmt. Es enthält sämtliche Informationen über den kontinuierlichen Zustand des SCD inkl. der Normalkräfte λ_{S_i} . Diese Normalkräfte werden benötigt, um in der Steuerungs- bzw. Regelungsstrategie die Bedingungen für die erwünschten Zustandsübergänge zu analysieren und zu bestimmen. So können in der Simulation unterschiedliche diskrete Zustände situationsabhängig abgebildet werden.

Aus diesem einen Modell mit veränderlichen Bindungen entstehen im weiteren Rechenweg vier unterschiedliche Modelle in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} , welche keine Information über die Normalkräfte ausgeben, aber durch die nicht vorhandenen abhängigen Variablen eine minimale Form des SCD-Verhaltens in jedem diskreten Zustand ergeben. Diese Modelle werden zum Reglerentwurf in jedem einzelnen diskreten Zustand verwendet.

Das System enthält vier unterschiedliche Ruhelagekonfigurationen des Ober- bzw. Unterkörpers, wobei hier nur eine Ruhelagekonfiguration praxisrelevant ist. Diese Ruhelagekonfiguration enthält entlang einer hergeleiteten Ruhelagekennlinie (Abb. 4.5) theoretisch unendlich viele Ruhelagepunkte.

Schließlich wurde das Verhalten des SCD in Simulationen ohne Steuerung/Regelung untersucht und auf Plausibilität geprüft.

Ein abschließendes Urteil über die Qualität des erhaltenen Modells kann erst nach dem Vergleich mit dem realen SCD gegeben werden (Kapitel 6.3).

5 Regelung

Regelungen werden üblicherweise eingesetzt, um den zeitlichen Verlauf einer geregelten Größe (Regelgröße) des zu regelnden Systems (Strecke) unter gleichzeitiger Unterdrückung der äußeren Störung sicherzustellen [50]. Dies wird durch Rückführung der gemessenen Regelgröße mit entsprechendem Regler, der mittels der Stellgröße auf die Strecke wirkt, erreicht. Dieser Begriff aus der Regelung zeitkontinuierlicher Systeme muss in dem hier behandelten Fall des SCD als hybrides System entsprechend erweitert werden. Durch die Erweiterung muss es möglich sein, einen diskreten Zustand zu erhalten bzw. eine zeitliche Änderung des diskreten Zustands (Zustandsänderung) zu erreichen. Außerdem stellt die Betrachtung der Stabilität bei diskreten Zustandsübergängen eine weitere Herausforderung bei hybriden Systemen dar [30].

Die Regelung behandelt das SCD im Zustand S_3 mit allen Rädern im Kontakt zum Boden und im aufrechten Zustand S_1 (Balancieren), bei welchem sich nur die Hinterräder im Kontakt zum Boden befinden. Es wird gezeigt, dass es für den Reglerentwurf ausreichend ist, nur diese zwei diskreten Zustände zu betrachten, um das Treppensteigen zu erreichen. Die restlichen Zustände gehören nicht zur grundlegenden Funktionalität des SCD in dieser Entwicklungsstufe. Das grundlegende Funktionsprinzip und der Systemaufbau wurden bereits in Kapitel 3 beschrieben. Die grundlegende Funktionalität des SCD wird mit Anwendung regelungstechnischer Methoden erreicht. Die dazu zu lösenden Aufgaben beinhalten das Folgen der Trajektorien des SCD in den Zuständen S_1 und S_3 sowie die Zustandsübergänge Absetzen $S_1 \rightarrow S_3$ und Abheben $S_3 \rightarrow S_1$.

Da modellbasierte Ansätze verwendet werden, mussten entsprechende Modelle des SCD entwickelt werden (Kapitel 4). Für den Reglerentwurf in den Zuständen S_1 bzw. S_3 werden entsprechende Modelle in unabhängigen Koordinaten \mathbf{v}_{S_i} verwendet und in Zustandsdarstellung gebracht (Kapitel 5.2). Die verwendeten Regler benötigen die Information aller geregelten Freiheitsgrade (Position des SCD l , Unterkörperwinkel ϕ , Oberkörperwinkel ρ und Drehwinkel des SCD θ) sowie deren Geschwindigkeiten. Zusätzlich wird der diskrete Zustand S_i des SCD benötigt. Im Gegensatz zu anderen Größen ist der Unterkörperwinkel ϕ mit einer ausreichenden dynamischen Genauigkeit nicht messbar, weshalb er mittels Sensordatenfusion in Kapitel 5.1 ermittelt wird.

Für die Regelung in den Zuständen S_1 und S_3 wird die exakte Linearisierung verwendet (Kapitel 5.3). Während im Zustand S_3 (Kapitel 5.4) das System den vollen relativen Grad besitzt und daher die vollständige exakte Linearisierung angewendet wird, hat das System im Zustand S_1 (Kapitel 5.5) einen nicht vollen relativen Grad und es wird eine partielle exakte Linearisierung durchgeführt. Um das System in S_1 zu stabilisieren, wird zusätzlich ein *gain scheduling* LQ-Regler verwendet. Die Problematik der Zustandsübergänge (Kapitel 5.6) resultiert in zu erfüllenden Bedingungen bei Vorgängen und Umschalten entsprechender Regler sowohl beim Übergang $S_1 \rightarrow S_3$ (Kapitel 5.7) als auch $S_3 \rightarrow S_1$ (Kapitel 5.8). Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ wird, basierend auf der exakten Linearisierung, mit einer bestimmten Ausgangsfunktion (virtuellen Bindung) den Anforderungen entsprechend entworfen. Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ wird einfacher, mittels Optimieren des Umschaltpunktes realisiert. Eine detaillierte Beschreibung der angewendeten Methoden folgt in den nächsten Unterkapiteln.

Das Blockschaftbild des gesamten Regelungssystems des SCD ist in Abb. 5.1 dargestellt. Die Regelalgorithmen, welche die Funktionalität des SCD ermöglichen, werden in dSPACE implementiert. Es folgt eine Beschreibung der implementierten Funktionen.

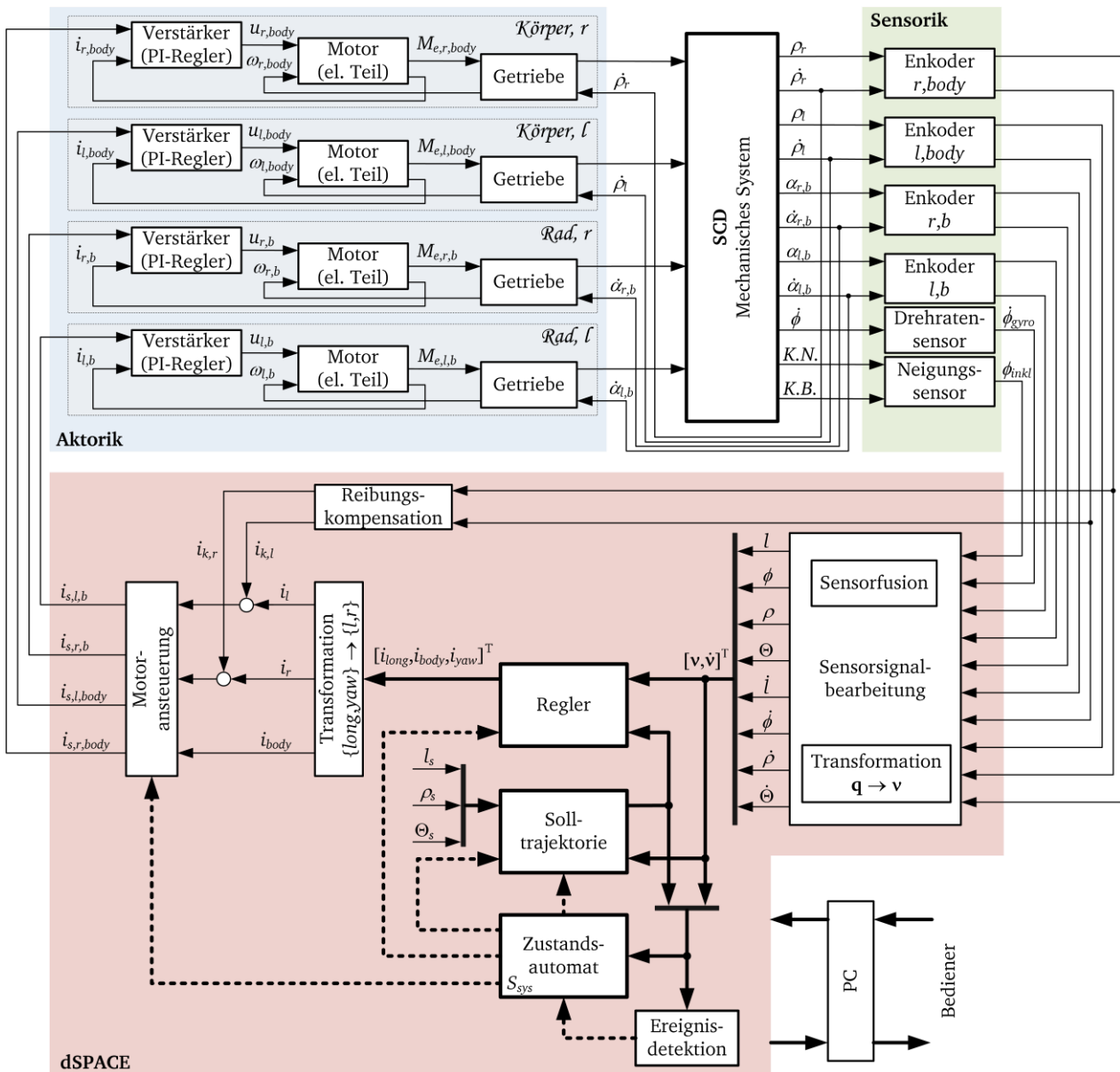


Abb. 5.1: Blockschaftbild des gesamten Systems des SCD. Es sind die physischen Komponenten und Elemente zur grundlegenden Funktionalität dargestellt.

Funktionen. Die Funktionen des Reglers sind in *Simulink* (zeitkontinuierlicher Teil) und *Stateflow* (diskontinuierlicher Teil) implementiert. Die beiden Teilsysteme tauschen bestimmte Signale aus (Abb. 5.1). Der zeitkontinuierliche Teil des Regelalgorithmus ist in einer signalflossblockorientierten Weise implementiert und die zugehörigen Signale sind mit vollen Linien bezeichnet. Der Begriff zeitkontinuierlich muss hier relativiert werden, weil sich diese Signale eigentlich in zeitdiskreten äquidistanten Schritten ändern. Im Gegensatz zu diesem (quasi)zeitkontinuierlichen Teil, gibt es einen weiteren Teil des Algorithmus, der diskontinuierlich abläuft und dessen Aktivität ereignisgesteuert ist. Diese Signale sind im BSB in Abb. 5.1 mit gestrichelten Linien dargestellt.

Der Eingang des zeitkontinuierlichen Teils des Algorithmus besteht aus dem Sensorbearbeitungsblock. Dieser beinhaltet Umwandlung, Anpassung, Filterung, Sensordatenfusion und Transformation der Sensorgrößen. Die Sensordatenfusion ist ein wichtiger Bestandteil der Sensorsignalbearbeitung, wobei aus der Winkelgeschwindigkeit des Gyroskops und dem Neigungswinkel des Inklinometers die Winkelgeschwindigkeit des Unterkörpers $\dot{\phi}$ und der Winkel ϕ gewonnen werden, wie im Detail in Kapitel 5.1 beschrieben. Als Ausgang dieses Blocks entsteht der zeitkontinuierliche Zustandsvektor, dessen Komponenten für die weitere Bearbeitung notwendig sind.

Der Block „Regler“ in Abb. 5.1 bezeichnet mehrere Unterfunktionen, die grundsätzlich die zeitkontinuierliche Regelung des SCD ausführen, bezogen auf die zwei betrachteten diskreten Zustände:

- Diskreter Zustand S_3 , SCD mit beiden Radachsen am Boden. In diesem Zustand sind die Position l , die Drehung des SCD um die eigene Achse Θ und der Oberkörperwinkel ρ geregelt. Nach Anweisung von außen²⁷ wird der Übergang zum Zustand S_1 initiiert.
- Diskreter Zustand S_1 , SCD mit hinterer Radachse am Boden. In diesem Zustand sind ebenfalls die Position l , die Drehung des SCD um die eigene Achse Θ und der Oberkörperwinkel ρ geregelt. Zusätzlich wird das SCD, das sich jetzt im inhärent instabilen Zustand befindet, durch die Regelung stabilisiert. Hier sind der Neigungswinkel ϕ und dessen Geschwindigkeit $\dot{\phi}$ entscheidend. Nach Anweisung von außen wird der Übergang zum Zustand S_3 initiiert.

Im Block „Solltrajektorie“ werden die Solltrajektorien erzeugt. Diese können sowohl von außen als auch als Konsequenz bestimmter Ereignisse aus dem diskontinuierlichen Teil des Algorithmus festgelegt werden.

Am Ausgang des Reglers sind die Stellgrößen, die dann entsprechend transformiert, durch die Reibungskompensation korrigiert und an die Radmotoren als Stromsollwerte ausgegeben werden. Eine Reibungskompensation wurde bereits an einem einfachen inversen Pendel implementiert [8].

Der diskontinuierliche Teil des Algorithmus besteht im Wesentlichen aus einem Zustandsautomaten und der Ereignisdetektion.

Der Zustandsautomat besteht aus unterschiedlichen diskreten Zuständen S_{sys} bezogen auf den Regelungsalgorithmus. Diese Zustände bestimmen hauptsächlich:

- welcher zeitkontinuierliche Regler aktiviert wird,
- das Auslösen der Solltrajektorien,
- das Auslösen sicherheitsbedingter Funktionen.

Die Zustände S_{sys} ändern sich je nach Erfüllen bestimmter Bedingungen. Die Bedingungen werden in der Ereignisdetektion geprüft und als Ereignisse ausgelöst. Die Ereignisdetektion erfasst zeitkontinuierliche Größen, die:

²⁷ Ausgelöst vom Bediener des SCD.

- entscheidend zur Bestimmung des diskreten Zustands S_i sind,
- maßgebend zum Auslösen automatischer Zustandsübergänge sind,
- als Grenzwerte zum Auslösen von Sicherheitsfunktionen (für das Deaktivieren des SCD) entscheidend sind und
- von außen angeregt, das Aktivieren der Zustandsübergänge auslösen.

Außer den erwähnten Funktionen wurden zusätzliche Hilfsfunktionen implementiert, um die Teile des SCD in Betrieb zu nehmen, zu bewerten und zu analysieren. Außerdem sind einige grundlegende Sicherheitsfunktionen implementiert, die nach dem Erreichen bestimmter Schwellenwerte das SCD deaktivieren. Deren Funktionen sind jedoch nicht entscheidend für die grundlegende Funktionalität des SCD und deshalb wird auf deren Beschreibung verzichtet.

5.1 Ermittlung des Neigungswinkels

Wie bereits in der Einleitung des Kapitels 5 sowie in der Beschreibung der Sensorik (Kapitel 3.4) erwähnt, wird ein qualitativ hochwertiges Signal des Neigungswinkels des SCD ϕ benötigt, um die Regelung zu realisieren. Es wird eine Sensordatenfusion entwickelt, die aus den Sensorausgängen ein Signal ϕ_{fusion} ergibt, das dem tatsächlichen Neigungswinkel in ausreichender Genauigkeit und Dynamik folgt.

5.1.1 Problembeschreibung

Da auf die Gravitationslinien der Erde kein unmittelbarer Bezug genommen werden kann, wird der Neigungswinkel mittels eines Neigungssensors (Inklinometers) indirekt gemessen.

Der Neigungssensor beinhaltet eine:

- ausreichend hohe stationäre Genauigkeit, aber auch eine
- geringe Dynamik aufgrund der Trägheit des hängenden Pendels (Sensorwirkprinzip), nicht ausreichend für die gewünschte Dynamik des SCD.

Beim Verwenden eines Drehratensensors (Gyroskops) zur Ermittlung des Neigungswinkels, der zunächst die Drehrate $\dot{\phi}$ ausgibt und durch eine Integration der Neigungswinkel ϕ ermittelt werden kann, resultiert ein Signal mit einem

- Drift, der durch die Integration des temperaturabhängigen Drehratensensor-Offsets entsteht, aber auch einer
- hohen Dynamik durch die hohe Bandbreite des Drehratensensors.

Die Absicht ist es nun, die Signale beider Sensoren mittels einer Sensordatenfusion zu verknüpfen und dabei ein hochwertiges Signal des Neigungswinkels ϕ zu erhalten, sodass die vorteilhaften Eigenschaften der beiden genannten Sensoren genutzt werden können:

- ausreichend hohe stationäre Genauigkeit und
- ausreichend hohe Dynamik.

Diese Sensordatenfusion wird in den Rahmen einer Beobachterstruktur eingebettet (Abb. 5.2). Als realer Prozess wird die Kinematik des SCD zusammen mit der Dynamik des Neigungssensors betrachtet. Der Ausgang ist das Signal des Neigungssensors und der Eingang kann dynamisch ausreichend genau mit dem Drehratensensor ermittelt werden. Das Modell des Prozesses ist in diesem Fall das Modell des Neigungssensors und die Rückführung muss die gewünschten Eigenschaften sicherstellen. Im Detail wird später auf die einzelnen Elemente eingegangen, zunächst wird die Modellbildung des Neigungssensors beschrieben.

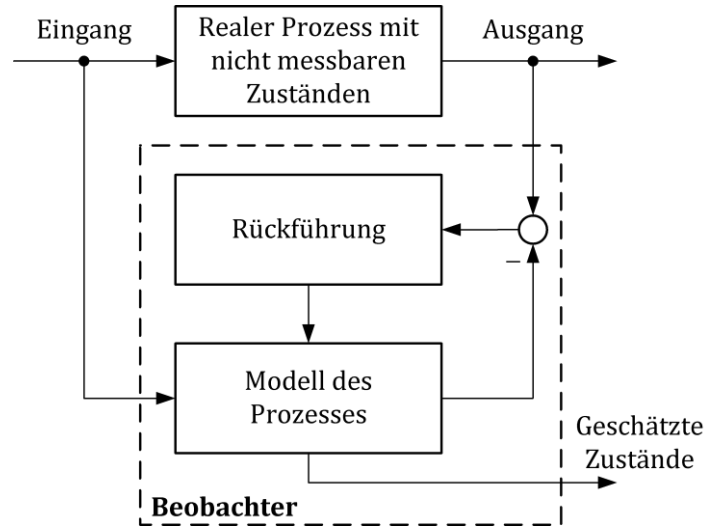


Abb. 5.2: Allgemeine Struktur eines Beobachters.

5.1.2 Modellbildung des Neigungssensors

Die Modellbildung des Neigungssensors bezieht sich auf das dynamische Verhalten seines Ausgangssignals bezüglich der Bewegung seines Gehäuses, welches am Oberkörper des SCD verbunden ist.

Hängendes Pendel. Aus dem Wirkungsprinzip kann geschlossen werden, dass die Dynamik des Neigungssensors als ein hängendes Pendel mit der Punktmasse m_p , die sich durch ein viskoses Medium bewegt, modelliert werden kann (Abb. 5.3), was durch Messungen bestätigt wurde. Das Pendel ist an einem Punkt 1 aufgehängt, die hängende Masse ist mit Punkt 2 bezeichnet. Der Ausschlag des Pendels gegenüber den Gravitationslinien ist mit ϕ_p bezeichnet. Das Signal des Sensors ϕ_{inkl} ist der Winkel des Pendels ϕ_p gegenüber dem Gehäusewinkel ϕ_h

$$\phi_{inkl} = \phi_h - \phi_p. \quad (5.1)$$

Im Fall der Befestigung am Oberkörper besteht der Gehäusewinkel aus

$$\phi_h = \phi + \rho. \quad (5.2)$$

Da die Masse des Neigungssensors nur einen Bruchteil der Masse des SCD-Oberkörpers beträgt, kann der Einfluss des hängenden Pendels auf das SCD vernachlässigt werden. Durch eine Wirkung

am Fußpunkt 1 des hängenden Pendels existiert durch diese Annahme nur eine Wirkung des SCD auf den Neigungssensor.

Daher kann die Einflusswirkung einseitig, nur in die Richtung von SCD zum Neigungssensor, angenommen werden, welche als eine beschleunigungsabhängige Wirkung am Fußpunkt 1 (Abb. 5.3) betrachtet werden kann.

In der Betrachtung des hängenden Pendels wird weiterhin angenommen, dass die Drehung des SCD um Θ in der Dynamik eine untergeordnete Rolle spielt, weil die Drehgeschwindigkeiten $\dot{\Theta}$ klein sind und somit die Fliehkräfte um die z -Achse klein genug sind. Deshalb wird das hängende Pendel nur im 2D-Raum mit der Höhe z und longitudinaler Bewegungsrichtung l betrachtet (Abb. 5.3).

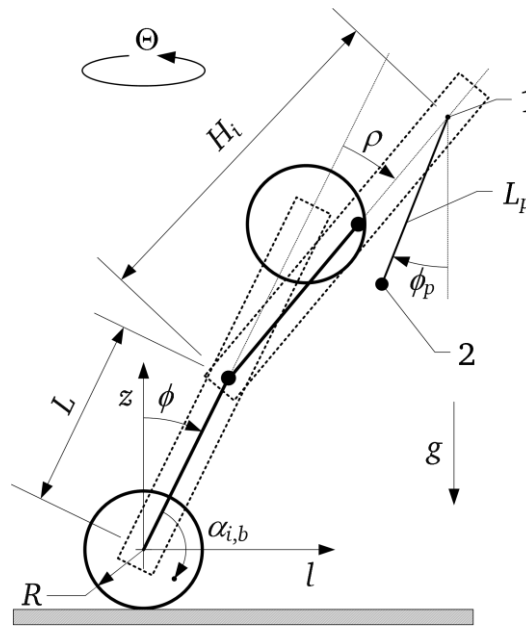


Abb. 5.3: Skizze zur Modellbildung des Neigungssensors am Oberkörper des SCD.

Die Koordinaten des Punktes 1 und des Punktes 2 sind daher mit folgenden Ortsvektoren²⁸ bestimmt

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l_1 - L_p \sin(\phi_p) \\ z_1 - L_p \cos(\phi_p) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Die entsprechenden Geschwindigkeiten sind mittels Zeitableitung der Ortsvektoren \mathbf{r}_1 bzw. \mathbf{r}_2 berechnet. Mit Anwendung *Lagrange II* Gleichung [57] wird die Dynamik des Pendels hergeleitet. Dazu benötigt man die kinetische Energie des hängenden Pendels $\frac{m_p}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2$, die potentielle Energie $gm_p(z_1 - L_p \cos \phi_p)$, welche sich auf den Höhenunterschied der Punktmasse bezieht und die dissipative *Rayleighs* Funktion $\frac{1}{2} b_p (\dot{\phi}_h - \dot{\phi}_p)^2$, welche die halbe Verlustleistung durch die viskose Rei-

²⁸ In diesem einfachen System des hängenden Pendels verzichtet man auf homogene Koordinaten. Ebenfalls beziehen sich alle Ortsvektoren auf das absolute Koordinatensystem K_a .

bung bei der Bewegung der Punktmasse darstellt. Durch Einsetzen der Energieausdrücke in die entsprechende *Lagrange II* Gleichung erhält man die Bewegungsgleichung der hängenden Masse

$$\ddot{\phi}_p = \frac{1}{m_p L_p^2} (m_p L_p \ddot{l}_1 \cos \phi_p - m_p L_p \ddot{z}_1 \sin \phi_p + b_p (\dot{\phi}_h - \dot{\phi}_p) - g m_p L_p \sin \phi_p). \quad (5.4)$$

Aus der Bewegungsgleichung (5.4) ist ersichtlich, dass einerseits die Beschleunigungen \ddot{l}_1 und \ddot{z}_1 und andererseits die Winkelgeschwindigkeit des Gehäuses $\dot{\phi}_h$, die ein Reibungsmoment verursacht, einen Einfluss auf den Winkel ϕ_p haben. Die Dynamik des Neigungssensors wird nun im Zusammenhang mit der Kinematik des SCD analysiert.

SCD Kinematik. Die Bewegung des Punktes 1 in Abb. 5.3 kann unter den erwähnten Annahmen aus der Anwendung des Ortsvektors im Koordinatensystem K_e (4.12) ermittelt werden. Dabei setzt man statt des Abstands H (Oberkörperachse zum Massenzentrum des Oberkörpers) den Abstand $H_i = 0.34$ m (Oberkörperachse zum Punkt 1) ein. Die kartesische Koordinate $^a x_b$ wird in der hier angewandten 2D-Betrachtung durch den longitudinalen Weg l ersetzt und die Drehung des SCD vernachlässigt ($\Theta = 0$). Die Koordinate $^a y_b$ ist in der 2D-Betrachtung nicht von Belang und die $^a z_b$ Koordinate wird als konstant betrachtet, weil die Regelung für Zustände S_1 und S_3 ausgelegt werden soll. Da die Werte l_1 und z_1 abgeleitet werden sollen, kann die konstante $^a z_b$ Koordinate ebenfalls ausgelassen werden. Mit diesen Annahmen kann die Position des Punktes 1 in Abhängigkeit der unabhängigen Variablen des SCD beschrieben werden

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l + H_i \sin(\rho + \phi) + L \sin \phi \\ H_i \cos(\rho + \phi) + L \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Modell. Bei zweimaligem Ableiten des Ortsvektors \mathbf{r}_1 (Anhang, (C.1) und (C.2)) erhält man schließlich die benötigten Beschleunigungen \ddot{l}_1 und \ddot{z}_1 , welche das hängende Pendel (5.4) mit der Kinematik des SCD bewegen. Nach dem Einsetzen der Beschleunigungen \ddot{l}_1 und \ddot{z}_1 in die Bewegungsgleichung (5.4), einer Linearisierung um den Arbeitspunkt $\{l_0, \phi_0, \rho_0, \phi_{p,0}, \phi_{h,0}\}$ und Laplace Transformation erhält man die Übertragungsfunktion der linearisierten Dynamik des hängenden Pendels. Mit Einbeziehen von (5.1) und (5.2) erhält man die Übertragungsfunktion des am SCD befestigten Neigungssensors, die aus drei Teilübertragungsfunktionen besteht

$$\phi_{inkl}(s) = H_l(s)l(s) + H_h(s)\phi_h(s) + H_\rho(s)\rho(s). \quad (5.6)$$

Die drei Teilübertragungsfunktionen in (5.6) bestimmen den Einfluss von der longitudinalen Bewegung des SCD $H_l(s)$, der Bewegung des Sensorgehäuses $H_h(s)$ und der Winkelbewegung des SCD-Oberkörpers $H_\rho(s)$. Auf die Darstellung der Abhängigkeit der zugehörigen Variablen von der Variable s , dem Laplace-Operator, wird im Weiteren aus Übersichtlichkeitsgründen verzichtet. Die konkreten Übertragungsfunktionen zur Gleichung (5.6) lauten

$$\begin{aligned}
H_l(s) &= -\frac{\frac{1}{L_p} s^2}{s^2 + 2d_0\omega_0 s + \omega_0^2}, \\
H_h(s) &= \frac{b_3 s^2 + \omega_0^2}{s^2 + 2d_0\omega_0 s + \omega_0^2}, \\
H_p(s) &= \frac{b_4 s^2}{s^2 + 2d_0\omega_0 s + \omega_0^2}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei die folgenden Parameter aus Messungen der Dynamik bestimmt wurden. Die Eigenfrequenz des Neigungssensors ω_0 ist mit der Gravitationsbeschleunigung und der Länge des hängenden Pendels L_p bestimmt. Daraus wird die Länge des hängenden Pendels im Inneren des Neigungssensors zu $L_p = 0.01367$ m bestimmt. Der Wert des Dämpfungsgrades d_0 von 1.02 deutet auf eine Abstimmung des Herstellers auf kritische Dämpfung hin

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{L_p}} = 26.79 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad d_0 = \frac{b_p}{2 m_p \sqrt{L_p^3 g}} = 1.02, \\
b_3 &= 1 - \frac{H_i}{L_p} \cos \phi_{h,0} - \frac{L}{L_p} \cos \phi_0, \quad b_4 = \frac{L}{L_p} \cos \phi_0.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Die Parameter b_3 und b_4 (5.8) ändern sich in der Abhängigkeit des Arbeitspunktes. Für das hier benötigte Intervall des Arbeitsbereiches $\phi_0 = [-1.9, 1.9]$ rad und das aus dem stationären Gleichgewicht folgende ρ_0 (formt zusammen mit ϕ_0 den Winkel $\phi_{h,0}$ nach (5.2)) schwanken die Werte der Parameter b_3 und b_4 in Intervallen von ca. $b_3 = [-18, -35]$ und $b_4 = [-3.5, 11]$. Die Verläufe sind im Anhang (Abb. C.1) dargestellt. Die Übertragungsfunktionen (5.7) deuten auf ein nicht minimalphasiges Verhalten hin [50], welches mit einer zunächst entgegengesetzt verlaufenden Sprungantwort charakterisiert ist und dadurch für eine hohe Dynamik des Regelungssystems nicht geeignet ist.

5.1.3 Beobachterentwurf

Mit dem aufgebauten Modell des Neigungssensors kann als nächster Schritt der Beobachter für die Anwendung in der Sensordatenfusion entworfen werden (Abb. 5.4). Das Modell des Drehratensensors folgt aus den in der Einführung des Kapitels 5.1 erwähnten Eigenschaften. Die Dynamik des Drehratensensors ist im betrachteten Frequenzbereich so hoch, dass sie als ideal angenommen werden kann. Das vorhandene Offset des Sensorsignals $\dot{\phi}_{off}$ hat aufgrund der Integration jedoch einen signifikanten Einfluss. Das Modell des Drehratensensors ist dementsprechend (Abb. 5.4)

$$\dot{\phi}_{gyro} = \dot{\phi}_h + \dot{\phi}_{off}. \tag{5.9}$$

Das Ziel ist es nun, mittels Integration des Drehratensensorsignals $\dot{\phi}_{gyro}$ die Dynamik der Winkelmessung $\hat{\phi}_h$ zu verbessern (Abb. 5.4), ohne den Drift durch den ermittelten Offset $\dot{\phi}_{off}$ mitzunehmen. Aus einem Signal $\hat{\phi}_h$ kann dann nach (5.2) der Winkel des Unterkörpers ϕ_{fusion} berechnet werden.

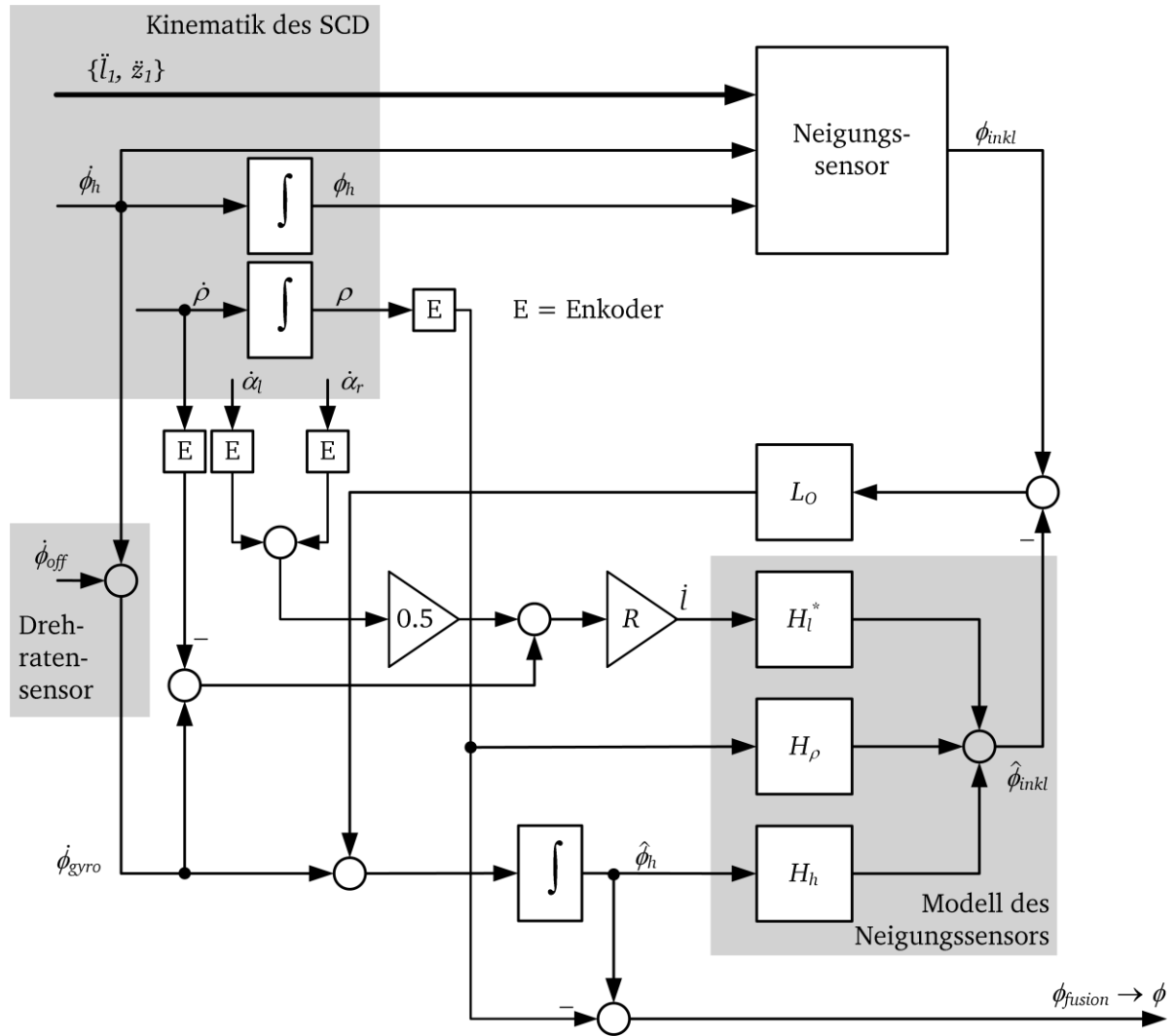


Abb. 5.4: Sensordatenfusion zur Ermittlung des Neigungswinkels ϕ mit entsprechender Beobachterstruktur.

In der allgemeinen Beobachterstruktur aus Abb. 5.2 stellt die SCD-Kinematik mit dem Neigungssensor aus Abb. 5.4 den realen Prozess dar. Der Eingang der Teilübertragungsfunktion H_l^* ist der longitudinale Weg l , welcher aus den Sensordaten α_l, α_r und Neigungswinkel ϕ nach der integralen Form der Gleichung (4.32) bestimmt wird. Hier kann der eigentliche Winkel ϕ nicht verwendet werden, weil dieser in der Realität nicht bekannt ist. Deshalb wird an dieser Stelle die Übertragungsfunktion $H_l(s)$ aus (5.7) umgeschrieben

$$H_l(s) = sH_l^*(s) = s \left(-\frac{\frac{1}{L_p} s}{s^2 + 2d_0\omega_0 s + \omega_0^2} \right). \quad (5.10)$$

Die modifizierte Übertragungsfunktion $H_l^*(s)$ hat als Eingang die Geschwindigkeit \dot{l} statt der Position l . Die Geschwindigkeit \dot{l} ist von den Größen $\dot{\alpha}_l, \dot{\alpha}_r$ und $\dot{\phi}$ abhängig. Statt $\dot{\phi}$, welche nicht bekannt ist, wird die Differenzgeschwindigkeit zwischen Gyroskop und Oberkörper benutzt, $\dot{\phi} \leftarrow \dot{\phi}_{gyro} - \dot{\rho}$. Der Unterschied zur realen Geschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist der temperaturabhängig veränderliche Offset $\dot{\phi}_{off}$, welcher durch die Zeitableitung innerhalb $H_l^*(s)$ eliminiert wird.

Die Teilübertragungsfunktion H_ρ stellt den partiellen Einfluss der Oberkörperbewegung dar. Der Eingang der Teilübertragungsfunktion H_h ist der ermittelte Gehäusewinkel $\hat{\phi}_h$. Bei Übereinstimmung des ermittelten Wertes $\hat{\phi}_{inkl}$ mit dem tatsächlichen Winkel wird $\phi_{inkl} - \hat{\phi}_{inkl} = 0$ und die Rückführung $L_O(s)$ muss keine Korrektur des erfassten Drehratensignals $\dot{\phi}_{gyro}$ vornehmen. Der Offset $\dot{\phi}_{off}$ des Drehratensensors ist jedoch unbekannt, sodass selbst mit einem idealen Modell eine Rückführung $L_O(s)$ benötigt wird. Das Signal $\dot{\phi}_{gyro}$ ist dynamisch hochwertig und soll nur um das unbekannte Offset $\dot{\phi}_{off}$ korrigiert werden.

Beim Bestimmen der Rückführung $L_O(s)$ wurde, beginnend mit einem einfachsten Fall einer proportionalen Wirkung, festgestellt, dass diese nicht fähig ist, den stationären Schätzfehler $\lim_{t \rightarrow \infty} (\phi_{inkl}(t) - \hat{\phi}_{inkl}(t))$ zu eliminieren. Erst beim Einführen einer zusätzlichen integralen Komponente kann dieser Schätzfehler eliminiert werden, was im Ergebnis zu einer genauen Ermittlung des Gehäusewinkels, $\hat{\phi}_h = \phi_h$, führt

$$L_O(s) = K_{P,sf} + K_{I,sf} \frac{1}{s}. \quad (5.11)$$

Die Parameter der PI-Rückführung $K_{P,sf}$ und $K_{I,sf}$ müssen die Stabilität und zudem die gewünschten dynamischen Eigenschaften des Beobachters gewährleisten. Äußere Signale α_l , α_r und ρ haben zwar einen Einfluss auf das ausgehende Signal ϕ_{fusion} , aber nicht auf die Eigendynamik des Beobachters. Deshalb wird der geschlossene Kreis des Beobachters hier ohne den Einfluss der äußeren Signale analysiert. Aus Abb. 5.4 kann unter diesen Annahmen das Ausgangssignal ϕ_{fusion} bestimmt werden

$$\phi_{fusion} = (H_h(s) L_O(s) + s)^{-1} (\dot{\phi}_{gyro} - R H_l^*(s) L_O(s) \dot{\phi}_{gyro} + L_O(s) \phi_{inkl}). \quad (5.12)$$

Nach dem Einsetzen von (5.7) und (5.11) in (5.12) erhält man folgenden Nenner der Übertragungsfunktion des Beobachtersystems $\text{Den}(\phi_{fusion})$, welcher die dynamischen Eigenschaften des Beobachtersystems bestimmt:

$$\text{Den}(\phi_{fusion}) = L_p s^4 + (b_3 K_{P,sf} L_p + 2 L_p d_0 \omega_0) s^3 + (b_3 K_{I,sf} L_p + L_p \omega_0^2) s^2 + K_{P,sf} L_p \omega_0^2 s + K_{I,sf} L_p \omega_0^2. \quad (5.13)$$

Die Stabilität des Beobachtersystems wird nach dem *Hurwitz*-Kriterium analysiert [50]. Dabei werden die Koeffizienten des Nenners (5.13) überprüft, wobei die physikalischen Parameter L_p , ω_0 , d_0 , R und b_3 mit konkreten Werten besetzt werden. Der Parameter b_3 ist dabei für das ermittelte Intervall zu prüfen. Die Rückführungsparameter $K_{P,sf}$ und $K_{I,sf}$ sind freie Parameter, deren Werte bestimmt werden, um Stabilität zu gewährleisten. Alle Pole der Übertragungsfunktion (5.12) müssen sich demnach in der linken Halbebene der s -Variable befinden. Die *Hurwitz*-Matrix (C.3) sowie die Bedingungen eines stabilen Rückführungsparameterbereiches (C.4) sind im Anhang dargestellt. Das Ergebnis ist für drei unterschiedliche Parameterwerte b_3 in Abb. 5.5 grafisch dargestellt.

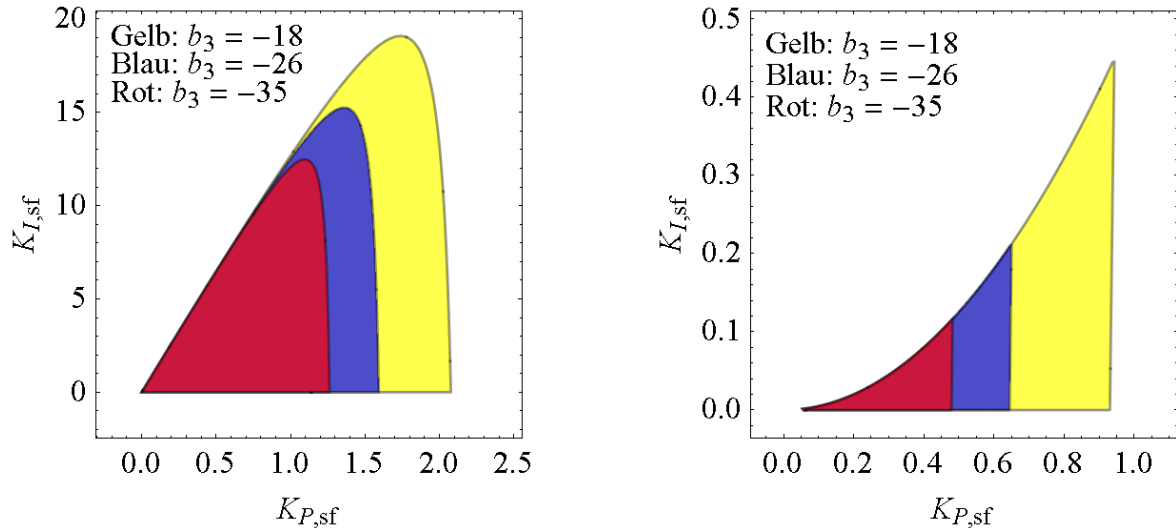


Abb. 5.5: Parameterbereich der PI-Rückführung des Schätzfehlers zur Ermittlung des Neigungswinkels ϕ : stabiles Verhalten (links), stabiles Verhalten mit geforderten Mindestdämpfungsgrad 0.707 (entspricht einer Überschwingweite von $\approx 5\%$) (rechts).

Ein strengeres Kriterium²⁹ nach [69] kann herangezogen werden, um ein aperiodisches Verhalten (Dämpfungsgrad³⁰ ≥ 1) des Beobachters zu bestimmen. Es zeigt sich, dass in dem hier betrachteten Fall des Beobachters mit einer PI-Rückführung ein aperiodisches Verhalten (alle Pole der Übertragungsfunktion (5.12) mit einem reellen negativen Wert) nicht möglich ist. Weiterhin kann aber mit einer Verallgemeinerung der Stabilitätskriterien²⁹ nach [70] ein Bereich mit einem vorgegebenen Mindestdämpfungsgrad gefunden werden (Abb. 5.5, rechts). Somit ist ein gut gedämpftes Verhalten gewährleistet, was beim SCD für die Bestimmung des Winkels ϕ erwünscht ist. Dadurch wird der Parameterbereich für die Rückführung des Beobachters weiter begrenzt. Da mehr Gewicht auf die dynamischen Eigenschaften des SCD bei den Zustandsübergängen gelegt wird ($S_3 \rightarrow S_1$ und $S_1 \rightarrow S_3$), entscheidet man sich, innerhalb des blau bezeichneten Bereiches (Abb. 5.5, rechts) zu suchen und schließlich Werte $K_{P,sf} = 0.54$, $K_{I,sf} = 0.15$ zu verwenden.

Die Simulation der Sensordatenfusion wurde basierend auf der longitudinalen SCD-Kinematik entsprechend Abb. 5.4 durchgeführt (Abb. C.2). Dafür wurden rechteckige Beschleunigungsprofile \ddot{l} , $\ddot{\phi}$ und \ddot{p} durch Simulationen ermittelter Amplituden generiert, welche nach Integration und Anwendung der SCD Kinematik (C.2) die entsprechenden Beschleunigungen des Neigungssensorgehäuses \ddot{l}_1 und \ddot{z}_1 liefern. Als realer Neigungssensor wird das nichtlineare Modell nach (5.4) und (5.1) verwendet. Eine Messung am realen SCD, dargestellt in Abb. C.3, stellt die realen Verläufe der Sensordatenfusion dar.

Bei der Parametervariation von $K_{P,sf}$ und $K_{I,sf}$ konnte durch Simulation festgestellt werden, dass ein annähernd aperiodisches Verhalten erreicht werden kann. Eine hohe Verstärkung bewirkt Verfälschungen im Verhalten am realen System wegen der nichtmodellierten Dynamik.

²⁹ Auf die Darstellung des Bereichs mittels eines Ungleichungssystems, hergeleitet in *Mathematica*, wird wegen Größe und Unübersichtlichkeit verzichtet.

³⁰ Der Dämpfungsgrad [76] hängt bei linearen dynamischen Systemen von der Position der Pole in der komplexen s -Ebene ab. Im Fall konjugiert komplexer Pole steigt mit dem fallenden Dämpfungsgrad die Überschwingweite.

Anhand dieser Ergebnisse wird in den folgenden Schritten des Reglerentwurfs angenommen, dass der reale Neigungswinkel ϕ durch den aus der Sensordatenfusion gewonnenen Winkel ϕ_{fusion} ohne Verfälschung darstellbar ist.

5.2 Modelle für den Reglerentwurf

Für den Reglerentwurf wird das kompaktere Modell des SCD in den unabhängigen Koordinaten (4.78), welches keine redundanten Informationen beinhaltet, in den Zustandsraum überführt. Im Sinne der anfangs eingeführten Methodik, werden dabei gleichzeitig beide diskreten Zustände, S_1 und S_3 , betrachtet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{S_i} &= \mathbf{f}_{S_i}(\mathbf{x}_{S_i}) + \mathbf{g}_{S_i}(\mathbf{x}_{S_i})\mathbf{i}_v, \\ \mathbf{y}_{S_i} &= \mathbf{h}_{S_i}(\mathbf{x}_{S_i}), \quad i \in \{1,3\}.\end{aligned}\tag{5.14}$$

In Gleichung (5.14) stellt \mathbf{x}_{S_i} den Zustandsvektor, bestehend aus den jeweiligen unabhängigen Variablen des Systems $\mathbf{x}_{S_i} = [\mathbf{v}_{S_i} \quad \dot{\mathbf{v}}_{S_i}]^T$, dar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{S_1} &= [l \quad \phi \quad \rho \quad \theta \quad \dot{l} \quad \dot{\phi} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\theta}]^T, \\ \mathbf{x}_{S_3} &= [l \quad \rho \quad \theta \quad \dot{l} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\theta}]^T.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Der Eingangsvektor \mathbf{i}_v ist mit (4.73) bestimmt und enthält für beide diskrete Zustände die gleiche Dimension, $m_v = 3$. Die Systemordnung ist demgegenüber unterschiedlich für die Zustände S_1 und S_3 und entspricht den Dimensionen der Zustandsvektoren: $n_{v,S_1} = 8$, $n_{v,S_3} = 6$. Die Ausgangsfunktionen werden als Vektorfunktionen der Dimension $p_v = 3$ für beide Zustände bestimmt. Dadurch ist es möglich, alle drei Größen des SCD l , ρ und θ zu beeinflussen. Der veränderliche Winkel ϕ im Zustand S_1 wird zusätzlich behandelt, was in Kapitel 5.5 beschrieben wird. In der Betrachtung des nichtlinearen MIMO Systems (5.14) wird in der Behandlung mit der exakten Linearisierung in dieser Arbeit gemäß [49] angenommen, dass die Anzahl der Ausgänge der Anzahl der Eingänge entspricht $m_v = p_v$.

Die glatten Vektorfelder $\mathbf{f}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ und $\mathbf{f}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ als Systemfunktionen sowie die Eingangsfunktionen $\mathbf{g}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) \in \mathbb{R}^{8 \times 3}$ und $\mathbf{g}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ sind im Anhang C.3 gegeben. Die Ausgangsfunktionen $\mathbf{h}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ und $\mathbf{h}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ müssen, je nach Bedarf, in unterschiedlichen Situationen des SCD noch definiert werden.

5.3 Exakte Linearisierung

Zunächst wird der allgemeine Teil der exakten Linearisierung des SCD in den Zuständen S_1 und S_3 behandelt. Dabei werden die Unterschiede der erreichten Ergebnisse in den betrachteten Zuständen S_1 und S_3 erläutert.

Die Ausgangsfunktionen des betrachteten geregelten Systems (5.14) $\mathbf{h}_{S_i}(\mathbf{x}_{S_i}), i \in \{1,3\}$ bestimmen die Nulldynamik und somit das Verhalten des SCD. In dieser Betrachtung werden hierfür, wie im Kapitel 2.4.4 beschrieben, ausschließlich Funktionen der Lage des SCD \mathbf{v}_{S_i} herangezogen

$$\mathbf{y}_{S_1} = \mathbf{h}_{S_1}(\mathbf{v}_{S_1}) = \begin{bmatrix} y_{S_1,1}(\mathbf{v}_{S_1}) \\ y_{S_1,2}(\mathbf{v}_{S_1}) \\ y_{S_1,3}(\mathbf{v}_{S_1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{S_3} = \mathbf{h}_{S_3}(\mathbf{v}_{S_3}) = \begin{bmatrix} y_{S_3,1}(\mathbf{v}_{S_3}) \\ y_{S_3,2}(\mathbf{v}_{S_3}) \\ y_{S_3,3}(\mathbf{v}_{S_3}) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Gleichung (5.16) macht deutlich, dass für beide diskrete Zustände jeweils drei Funktionen $y_{S_i,q}$, $i \in \{1,3\}$, $q \in \{1,2,3\}$ definiert werden müssen. Die allgemeinen Ausdrücke der exakten Linearisierung können unabhängig von konkreten Werten dieser Funktionen bestimmt werden. Mittels der Lie-Ableitungen $L_{\mathbf{f}_{S_i}}^\kappa \mathbf{h}_{S_i}$ und $L_{\mathbf{g}_{S_i}} L_{\mathbf{f}_{S_i}}^\kappa \mathbf{h}_{S_i}$, $\kappa \in \{0,1,2, \dots\}$ werden die relativen Grade in beiden betrachteten Fällen S_1 und S_3 bestimmt. Die Bestimmung des relativen Grades bei MIMO Systemen ist analog zur Bestimmung des relativen Grades bei SISO Systemen (Kapitel 2.4).

Der Grund, weshalb zu diesem Zeitpunkt noch eine relativ allgemeine Betrachtungsform der Ausgangsfunktionen verwendet wird, ist zum einen ein breiterer Einblick in die Problematik der exakten Linearisierung und zum anderen sind es Implementierungsgründe. Es wurde herausgefunden, dass der Weg vom Erstellen der einzelnen Ausgangsfunktionen bis zur Implementierung des daraus resultierenden Regelgesetzes systematischer und überschaubarer abläuft.

Relativer Grad r . Bei MIMO Systemen ist der relative Grad³¹ r aus mehreren Komponenten $\{r_l, r_p, r_\theta\}$ zusammengesetzt. Das System (5.14) hat den relativen Grad r im Punkt \mathbf{x}_0 , wenn [49]

- (i) $L_{\mathbf{g}_{S_i,q}} L_{\mathbf{f}_{S_i}}^\kappa y_{S_i,q}(\mathbf{x}_{S_i}) = 0$ für alle \mathbf{x}_{S_i} in der Umgebung $\mathbf{x}_{S_i,0}$, alle $\kappa < r_q - 1$ und alle $q \in \{1,2,3\}$ und
- (ii) die $\mathbf{R}_{A,S_i}(\mathbf{x}_{S_i}) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ Matrix

$$\mathbf{R}_{A,S_i}(\mathbf{x}_{S_i}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_{S_i,1}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,1}(\mathbf{x}_{S_i}) & L_{\mathbf{g}_{S_i,2}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,1}(\mathbf{x}_{S_i}) & L_{\mathbf{g}_{S_i,3}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,1}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ L_{\mathbf{g}_{S_i,1}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,2}(\mathbf{x}_{S_i}) & L_{\mathbf{g}_{S_i,2}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,2}(\mathbf{x}_{S_i}) & L_{\mathbf{g}_{S_i,3}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,2}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ L_{\mathbf{g}_{S_i,1}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,3}(\mathbf{x}_{S_i}) & L_{\mathbf{g}_{S_i,2}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,3}(\mathbf{x}_{S_i}) & L_{\mathbf{g}_{S_i,3}} L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,3}(\mathbf{x}_{S_i}) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

nichtsingulär³² bei $\mathbf{x}_{S_i} = \mathbf{x}_{S_i,0}$ ist.

Es sei angemerkt, dass die q -te Komponente des relativen Grades r_q die Anzahl der Ableitungen des q -ten Ausgang $y_{S_i,q}$ darstellt, bei der mindestens eine Komponente des Eingangs \mathbf{i}_v erscheint [49].

³¹ Der relative Grad bei MIMO Systemen r wird in [49] als *vector relative degree* bezeichnet und in [44] als *total relative degree*.

³² Eine Matrix \mathbf{A} ist nichtsingulär, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Die einzelnen Ausdrücke $L_{\mathbf{g}_{S_1,q}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^K y_{S_1,q}(\mathbf{x}_{S_1})$ sind im Anhang (C.20) dargestellt. Die dazugehörigen Ausdrücke $L_{\mathbf{f}_{S_1}}^K y_{S_1,q}(\mathbf{x}_{S_1})$ sind vorher (C.18) berechnet worden. Entsprechend sind die Ausdrücke für den Zustand S_3 ebenfalls im Anhang (C.21) mit den Zwischenergebnissen (C.19) dargestellt. Diese Werte bestehen aus Elementen der Ausgangsfunktionen und des Modells (5.14).

Daraus kann man schließen, dass der relative Grad des SCD anhand der Ausgangsfunktionen (5.16), welche nur die Lage \mathbf{v}_{S_i} des Systems beinhalten, in beiden behandelten Fällen des Zustands S_1 und S_3 , folgenden Wert annimmt

$$r = \{r_l, r_\rho, r_\theta\} = \{2, 2, 2\}. \quad (5.18)$$

Zu bemerken ist, dass während im Fall S_3 die Summe der Komponenten des relativen Grades gleich der Ordnung des Systems ist $r_l + r_\rho + r_\theta = n_{\mathbf{v},S_3} = 6$, im Fall S_1 die Summe kleiner als die Ordnung des Systems ist $r_l + r_\rho + r_\theta < n_{\mathbf{v},S_1} = 8$.

Koordinatentransformation. Laut Proposition 5.1.2 in [49], werden die Funktionen $\psi_{\kappa,q}(\mathbf{x}_{S_i})$ für alle $q \in \{1, 2, 3\}$ und alle $\kappa \in \{1, 2, \dots, r_q\}$, wobei $r_l + r_\rho + r_\theta \leq n$, gebildet

$$\begin{aligned} \psi_{1,q}(\mathbf{x}_{S_i}) &= y_{S_i,q}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \psi_{2,q}(\mathbf{x}_{S_i}) &= L_{\mathbf{f}_{S_i}} y_{S_i,q}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ &\vdots \\ \psi_{r_q,q}(\mathbf{x}_{S_i}) &= L_{\mathbf{f}_{S_i}}^{r_q-1} y_{S_i,q}(\mathbf{x}_{S_i}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Im Fall $r = r_l + r_\rho + r_\theta < n$ können stets zusätzliche $n - r$ Funktionen $\psi_{r+1}(\mathbf{x}_{S_i}) \dots \psi_n(\mathbf{x}_{S_i})$ gefunden werden, so dass die Vektorfunktion $\Psi(\mathbf{x}_{S_i})$ eine nichtsinguläre *Jacobi*-Matrix $\Psi_{\mathbf{x}_{S_i}}(\mathbf{x}_{S_i})$ bei \mathbf{x}_0 besitzt und somit als eine lokale Koordinatentransformation in der Umgebung von $\mathbf{x}_{S_i,0}$ geeignet ist

$$\Psi(\mathbf{x}_{S_i}) = \begin{bmatrix} \psi_{1,1}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \vdots \\ \psi_{r_l,1}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \psi_{1,2}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \vdots \\ \psi_{r_\rho,2}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \psi_{1,3}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \vdots \\ \psi_{r_\theta,3}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \psi_{r+1}(\mathbf{x}_{S_i}) \\ \vdots \\ \psi_n(\mathbf{x}_{S_i}) \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Nach der Einführung des relativen Grades $r = r_l + r_\rho + r_\theta$ und der Koordinatentransformation ist es möglich, die ursprünglichen Koordinaten \mathbf{x}_{S_i} in neue Koordinaten mit $\mathbf{z}_{S_i} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_{S_i})$ zu transformieren. Da die *Jacobi*-Matrix $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}_{S_i}}$ von den Ausgangsfunktionen $y_{S_i,q}$ abhängig ist (5.19), kann die Gültigkeit einer bestimmten Koordinatentransformation $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_{S_i})$ erst geprüft werden, wenn die konkreten Ausgangsfunktionen bekannt sind.

Prinzipiell können danach die Ergebnisse der exakten Linearisierung aus Kapitel 2.4 angewendet werden. Hierbei werden gleich die konkreten Anwendungen zur Behandlung des SCD in Betrachtung genommen. Es wird zunächst der einfachere Fall, der Regelung im Zustand S_3 betrachtet und danach der komplexere Fall, der Regelung im Zustand S_1 .

5.4 Regelung im Zustand S_3

Wie im Kapitel 4 bereits beschrieben, befindet sich das SCD in S_3 mit beiden Radachsen im Kontakt zum Boden. Mit den drei Aktorgrößen des Vektors $\mathbf{i}_v = [i_{long}, i_{body}, i_{yaw}]^T$ können die drei zu regelnden Größen l , ρ und θ beeinflusst werden.

Daher werden natürlich diese Größen als Ausgangsfunktionen definiert

$$\mathbf{y}_{S_3} = \mathbf{h}_{S_3}(\mathbf{v}_{S_3}) = \begin{bmatrix} y_{S_3,1}(\mathbf{v}_{S_3}) \\ y_{S_3,2}(\mathbf{v}_{S_3}) \\ y_{S_3,3}(\mathbf{v}_{S_3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ \rho \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Die Koordinatentransformation ist entsprechend (5.19) und (5.20) trivial

$$\boldsymbol{\psi}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = [l \quad l \quad \rho \quad \dot{\rho} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T. \quad (5.22)$$

Die Gültigkeit der Transformation $\boldsymbol{\psi}_{S_3}$ muss überprüft werden, d.h. die *Jacobi*-Matrix $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}_{S_3}}$ muss nicht singulär sein. Die Determinante dieser *Jacobi*-Matrix zeigt $\det \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}_{S_3}} = -1 \neq 0$ und somit die Gültigkeit der Transformation $\boldsymbol{\psi}_{S_3}$. Die neuen Koordinaten $z_{S_3,j} = \psi_{S_3,j}(\mathbf{x}_{S_3})$, für alle $j \in \{1, \dots, 6\}$, führen mit den zugehörigen Funktionen die Koordinaten des ursprünglichen Zustandsvektors \mathbf{x}_{S_3} in den neuen Zustandsvektor \mathbf{z}_{S_3} . Da es sich hierbei um eine triviale Koordinatentransformation handelt, werden die ursprünglichen Bezeichnungen gemäß (5.22) beibehalten.

Im Zustand S_3 ist eine exakte Linearisierung im Zustandsraum möglich, weil der relative Grad der Ordnung des Systems entspricht [49]. Zugleich beinhaltet das System keine Nulldynamik.

Die Entkopplungsmatrix $\mathbf{R}_{A,S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, welche die Wechselwirkungen der jeweiligen Eingang-Ausgang Kanäle abtrennt, wurde bereits mit (5.17) bestimmt. Es wird außerdem die Matrix $\mathbf{R}_{b,S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ benötigt, welche anhand der bereits bestimmten Ausdrücke $L_{\mathbf{f}_{S_3}}^{r_l} y_{S_3,1}(\mathbf{x}_{S_3})$, $L_{\mathbf{f}_{S_3}}^{r_\rho} y_{S_3,2}(\mathbf{x}_{S_3})$ und $L_{\mathbf{f}_{S_3}}^{r_\theta} y_{S_3,3}(\mathbf{x}_{S_3})$ zusammengesetzt wird

$$\mathbf{R}_{b,S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = \begin{bmatrix} L_{f_{S_3}}^2 y_{S_3,1}(\mathbf{x}_{S_3}) \\ L_{f_{S_3}}^2 y_{S_3,2}(\mathbf{x}_{S_3}) \\ L_{f_{S_3}}^2 y_{S_3,3}(\mathbf{x}_{S_3}) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Das Regelgesetz, das die Strecke (5.14) linearisiert, besteht aus einem Rückkopplungsglied $\mathbf{r}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3})$ und einem Vorsteuerungsglied $\mathbf{v}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3})$ (Abb. 5.6)

$$\mathbf{i}_v = \underbrace{\mathbf{R}_{A,S_3}(\mathbf{x}_{S_3})^{-1}}_{\mathbf{v}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3})} \mathbf{v} - \underbrace{\mathbf{R}_{A,S_3}(\mathbf{x}_{S_3})^{-1} \mathbf{R}_{b,S_3}(\mathbf{x}_{S_3})}_{\mathbf{r}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3})}. \quad (5.24)$$

In Gleichung (5.24) stellt $\mathbf{v} = [v_{long} \quad v_{body} \quad v_{yaw}]^T$ den neuen Eingang dar. Die Rückführung \mathbf{r}_{S_3} ist im Anhang mit (C.24) und die Vorsteuerung \mathbf{v}_{S_3} mit (C.26) angegeben.

Mit dem Regelgesetz (5.24) und der Strecke (5.14) ergibt sich das global linearisierte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{S_3} &= \underbrace{\mathbf{f}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) + \mathbf{g}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) \mathbf{r}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3})}_{\mathbf{f}_{fl,S_3}(\mathbf{x}_{S_3})} + \underbrace{\mathbf{g}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) \mathbf{v}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3})}_{\mathbf{g}_{fl,S_3}(\mathbf{x}_{S_3})} \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_{S_3} &= \mathbf{h}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Durch die exakte Linearisierung erhaltene neue Funktionen \mathbf{f}_{fl,S_3} und \mathbf{g}_{fl,S_3} enthalten geänderte Werte

$$\mathbf{f}_{fl,S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = \begin{bmatrix} \ddot{l} \\ \ddot{\rho} \\ \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{fl,S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Währenddessen bleibt die Ausgangsfunktion \mathbf{h}_{S_3} unverändert. Unter Einbeziehen des Zustandsvektors \mathbf{x}_{S_3} (5.15) nehmen die Gleichungen des durch die exakte Linearisierung behandelten Systems folgende Form an:

$$\begin{aligned} \ddot{l} &= v_{long}, \\ \ddot{\rho} &= v_{body}, \\ \ddot{\theta} &= v_{yaw}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Dieses lineare System (5.27) kann auch mittels *Laplace*-Transformation in den s -Bereich überführt werden

$$\begin{bmatrix} l(s) \\ \rho(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{long}(s) \\ v_{body}(s) \\ v_{yaw}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Offensichtlich wurde das ursprüngliche nichtlineare MIMO System (5.14) durch die exakte Linearisierung (5.27) bzw. (5.28) vollkommen linearisiert und entkoppelt, sodass daraus drei unabhängige SISO Systeme entstanden sind.

Es ist auch eine physikalische Interpretation des erhaltenen Systems (5.27) bzw. (5.28) möglich. Während bei dem ursprünglichen nichtlinearen System (5.14) das SCD unter Einfluss der Gravitation und sonstiger nichtlinearer innerer Momente sowie nichtlinearen äußeren Momenten durch den Eingang \mathbf{i}_v stand, steht das linearisierte System (5.27) bzw. (5.28) nur unter Einfluss des neuen Eingangs \mathbf{v} . Zudem verhält sich das linearisierte System so, als gebe es bezüglich der Lage des SCD, gegeben mit den Größen l , ρ und θ , drei voneinander unabhängige Trägheitseinflüsse, von denen jeder mit einem einzelnen Eingang des neuen Eingangsvektors \mathbf{v} beeinflusst werden kann.

Das durch die exakte Linearisierung erhaltene System (5.27) bzw. (5.28) hat aus regelungstechnischer Sicht durch den doppelten Pol im Ursprung der s -Ebene für jedes der drei SISO Untersysteme instabiles Verhalten. Es ist aber vollständig steuerbar, weshalb die Pole dieses Systems mit einem zusätzlichen linearen Regler auf beliebige Position in der s -Ebene gesetzt werden können. Ein asymptotisch stabiles Verhalten eines solchen Systems ist gewährleistet, wenn sich sämtliche Pole in der linken s -Halbebene befinden.

Das System (5.27) bzw. (5.28) kann in den neuen transformierten Koordinaten nach der Transformation $\mathbf{z}_{S_3} = \boldsymbol{\Psi}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3})$ (5.22) dargestellt werden, wobei die neuen Koordinaten \mathbf{z}_{S_3} mit der Form (2.73) in die Koordinaten des linearen Teilsystems $\boldsymbol{\xi}$ und die der internen Dynamik $\boldsymbol{\eta}$ geteilt werden können. Da eine interne Dynamik in dem Fall der Linearisierung im Zustand S_3 nicht existiert, bleibt nur der Vektor $\boldsymbol{\xi}$ übrig. Das System (5.27) bzw. (5.28) sieht in den neuen Koordinaten aus wie folgend dargestellt:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{S_3} &= \mathbf{A}_{fl,S_3} \boldsymbol{\xi}_{S_3} + \mathbf{B}_{fl,S_3} \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_{S_3} &= \mathbf{C}_{fl,S_3} \boldsymbol{\xi}_{S_3} \end{aligned} \quad (5.29)$$

mit

$$\boldsymbol{\xi}_{S_3} = \begin{bmatrix} l \\ \dot{l} \\ \rho \\ \dot{\rho} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{fl,S_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{fl,S_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{fl,S_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Führungsverhalten. Nach dem in Kapitel 2.4.3 für SISO Systeme dargestellten Prinzip, welches hier unmittelbar angewendet werden kann, da es sich hier nach der Anwendung der exakten Linearisierung prinzipiell um drei SISO Systeme handelt, wird das Führungsverhalten mit dem Einführen eines zusätzlichen linearen Regelgesetzes sichergestellt (Abb. 5.6)

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_{lin} \mathbf{e}_{S_3} + \mathbf{\Xi}_s. \quad (5.31)$$

Im linearem Regelgesetz (5.31) stellt \mathbf{e}_{S_3} die Differenz zwischen der Soll- und Isttrajektorie dar

$$\mathbf{e}_{S_3} = \boldsymbol{\xi}_s - \boldsymbol{\xi}_{S_3}. \quad (5.32)$$

Die Komponenten der Solltrajektorie sind bis zur $(r_q - 1)$ -ten³³ Ableitung im Vektor $\boldsymbol{\xi}_s$ zusammengefasst und für die r_q -te Ableitung in dem Vektor $\mathbf{\Xi}_s$

$$\boldsymbol{\xi}_s = \begin{bmatrix} l_s \\ \dot{l}_s \\ \rho_s \\ \dot{\rho}_s \\ \theta_s \\ \dot{\theta}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Xi}_s = \begin{bmatrix} \ddot{l}_s \\ \ddot{\rho}_s \\ \ddot{\theta}_s \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Die Matrix \mathbf{K}_{lin} stellt die Verstärkungen des linearen Reglers dar, die so ausgewählt sind, dass die einzelnen Komponenten des q -ten SISO Kanals der Differenz \mathbf{e}_{S_3} , $q \in \{l, \rho, \theta\}$, auch nur den q -ten Kanal der Steuerungsgröße \mathbf{v} betreffen

$$\mathbf{K}_{lin} = \begin{bmatrix} k_{P,l} & k_{D,l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{P,\rho} & k_{D,\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{P,\theta} & k_{D,\theta} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Bei Betrachtung des q -ten SISO Systems betrifft die Verstärkung $k_{P,q}$ die Position und $k_{D,q}$ die Geschwindigkeit des q -ten Kanals. Für jedes q -tes SISO System stellt dies die Struktur eines PD-Reglers dar.

³³ r_q stellt den q -ten relativen Grad dar, $q \in \{l, \rho, \theta\}$.

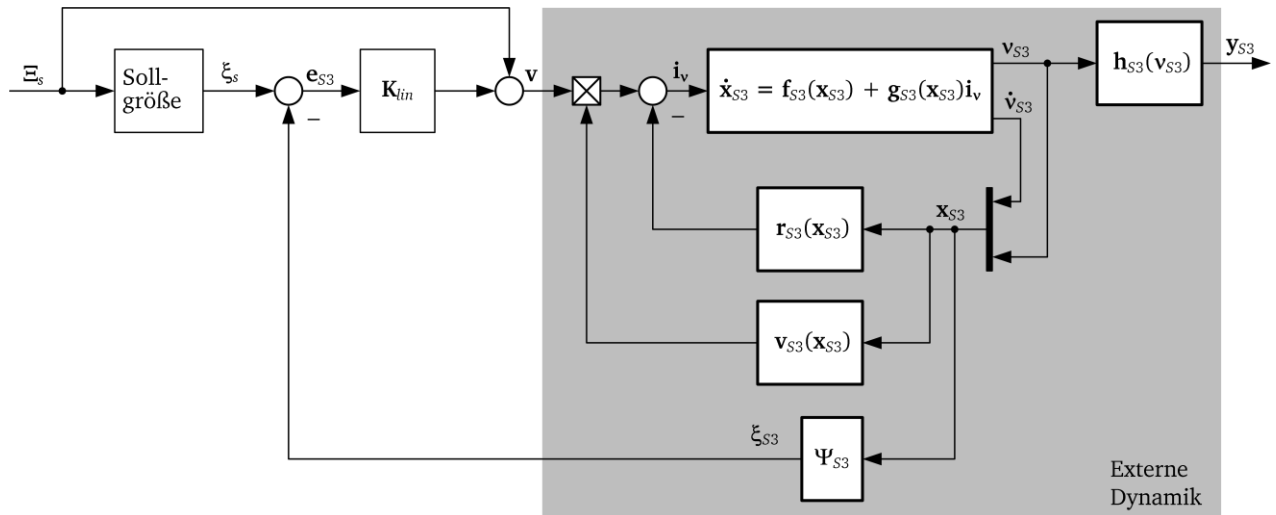


Abb. 5.6: Struktur des Regelungssystems im Zustand S_3 . Das System ist global linearisiert und beinhaltet keine interne Dynamik.

Bei der Analyse der Stabilität des q -ten Kanals, dessen Strecke aus einem doppelten Integrator besteht und der Regler einem PD-Regler entspricht, kann mit Anwendung des *Hurwitz*-Stabilitätskriteriums gezeigt werden, dass die Stabilität gewährleistet ist, wenn beide Verstärkungsparameter positiv sind

$$(k_{P,q} > 0) \wedge (k_{D,q} > 0), \quad q \in \{l, \rho, \theta\}. \quad (5.35)$$

Für die Strecke eines doppelten Integrators ist also ein PD-Regler notwendig und ausreichend, um ein asymptotisch stabiles Verhalten des Regelkreises zu gewährleisten.

Mit dem Einsetzen des linearen Regelgesetzes \mathbf{v} (5.31) in das System (5.29) folgt der geschlossene Regelkreis

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{S_3} &= (\mathbf{A}_{fl,S_3} - \mathbf{B}_{fl,S_3} \mathbf{K}_{lin}) \xi_{S_3} + \mathbf{B}_{fl,S_3} \mathbf{K}_{lin} \xi_s + \Xi_s \\ y_{S_3} &= \mathbf{C}_{fl,S_3} \xi_{S_3}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Eine andere Darstellung des Regelungssystems (5.36) mit den Ausdrücken der Differenz \mathbf{e}_{S_3} , macht deutlich, dass das Führungsverhalten ideal verläuft. Dazu wird die Ableitung der Differenz $\dot{\mathbf{e}}_{S_3}$ (5.32) betrachtet. Mit dem Einsetzen des Wertes $\dot{\xi}_{S_3}$ aus (5.36) und Berücksichtigung der Tatsache $\dot{\xi}_s = \mathbf{A}_{f,S_3l} \xi_s + \mathbf{B}_{f,S_3l} \Xi_s$ folgt die Darstellung des Regelungssystems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{S_3} &= (\mathbf{A}_{fl,S_3} - \mathbf{B}_{fl,S_3} \mathbf{K}_{lin}) \mathbf{e}_{S_3} \\ y_{S_3} &= \mathbf{C}_{fl,S_3} (\xi_s - \mathbf{e}_{S_3}). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die Zustandsgleichung (5.37) wird nur mit den Anfangszuständen angetrieben. Wenn also die Anfangszustände bei Null stehen $\mathbf{e}_{S_3}(0) = \mathbf{0}$ und die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}_{fl,S_3} - \mathbf{B}_{fl,S_3} \mathbf{K}_{lin}$ auf der linken s -Halbebene liegen, was mit den Bedingungen (5.35) gewährleistet ist, dann bleibt

$\mathbf{e}_{S_3}(t)$ Null für alle Zeiten. Der Ausgang des Systems ist in diesem idealen Fall nur von der Solltrajektorie $\mathbf{y}_{S_3} = \mathbf{C}_{fl,S_3} \mathbf{x}_s$ abhängig.

Das Erzeugen einer entsprechenden Solltrajektorie wird mit einem kubischen Polynom realisiert, wie im Kapitel 2.5 dargestellt. Allerdings steht, wie im Folgenden gezeigt wird, nur das genaue Folgen des Oberkörperwinkels ρ im Vordergrund. Deshalb wurde das Folgen der Solltrajektorie nach dem hier beschriebenen Prinzip auch nur für den Winkel ρ realisiert.

Die Sollwerte für die Länge in der longitudinalen Richtung l und die Drehung des SCD um die Eigenachse Θ wurden mit einem Sprunggenerator und einer Geschwindigkeitsbegrenzung (*rate limiter*) realisiert. Zudem werden nur die jeweiligen Positionen und Geschwindigkeiten dieser Größen in den Regelkreis geführt. Auf eine Vorsteuerung der Beschleunigungen dieser beiden Größen wird verzichtet. Die Konsequenz dessen ist, dass die Größen l und Θ nicht deren Sollgrößen exakt folgen, wie es der Fall bei der Größe ρ ist. Dies ist für die Ziele dieser Arbeit jedoch nicht von Interesse.

Forderung an die Dynamik. Das linearisierte System (5.29) mit dem dazugehörigen linearen Regler (5.31) stellt, wie schon beschrieben, drei entkoppelte SISO Systeme zweiter Ordnung dar.

Sowohl die Stabilität als auch das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises hängen von der Lage der Pole ab. Diese werden als Eigenwerte aus dem Nenner der Übertragungsfunktion des q -ten, $q \in \{l, \rho, \Theta\}$ geschlossenen Regelkreises der Strecke $1/s^2$ und des PD-Reglers $k_{P,q} + k_{D,q}s$ bestimmt

$$s^2 + k_{D,q}s + k_{P,q} = 0, \quad q \in \{l, \rho, \Theta\}. \quad (5.38)$$

Mit Koeffizientenvergleich des Polynoms (5.38) mit einem allgemeinen Polynom des PT₂-Gliedes $s^2 + 2d_{0,q}\omega_{0,q}s + \omega_{0,q}^2$ folgt

$$k_{P,q} = \omega_{0,q}^2, \quad k_{D,q} = 2d_{0,q}\omega_{0,q}, \quad q \in \{l, \rho, \Theta\}. \quad (5.39)$$

In (5.39) stellt $\omega_{0,q}$ die Eigenfrequenz eines PT₂-Gliedes in rad/s und $d_{0,q}$ die relative Dämpfung dar. Anhand des Vergleiches mit einem allgemeinem PT₂-Glied können die Reglerparameter $k_{P,q}$ und $k_{D,q}$ bestimmt werden.

Eine hohe Verstärkung $k_{P,q}$ vermindert den stationären Fehler im realen System. Eine hohe Verstärkung $k_{D,q}$ erhöht die relative Dämpfung. Zu hohe Parameterwerte verstärken aber auch den Einfluss der nichtmodellierten Dynamik und hochfrequenter Störeinflüsse (z.B. Rauschen) im Verhalten des realen Systems. Deshalb wird in Versuchen am realen System ein Kompromiss zwischen diesen Kriterien gefunden. Die ermittelten Parameter der Regler sind in Tab. 5.1 dargestellt.

Tab. 5.1: Reglerparameter des gewählten Reglers für die jeweilige Koordinate q .

Reglerparameter	$q = l$	$q = \rho$	$q = \theta$
$k_{P,q}$	35	400	9
$k_{D,q}$	10	32	5
$\omega_{0,q} / \text{rad/s}$	5.9	20	3
$d_{0,q}$	0.8	0.8	0.8

5.5 Regelung im Zustand S_1

Das SCD im Zustand S_1 stellt ein unteraktuiertes System dar. Die Anzahl der Aktoren ist im Vergleich zum Zustand S_3 gleich, es gibt jedoch neben den in S_3 vorhandenen Größen l , ρ und θ einen zusätzlichen Freiheitsgrad, die Neigung des Unterkörpers ϕ .

Physikalisch bedingt kann das SCD einen stationären Zustand in S_1 nur in Ruhelagen, welche bereits im Kapitel 4.1.4 mit Abb. 4.5 dargestellt wurden, erhalten.

Die übliche Vorgehensweise ist es, das nichtlineare System (5.14) mit dem dazugehörigen Zustandsvektor \mathbf{x}_{S_1} (5.15) in dem Arbeitspunkt $\{\phi_0, \rho_0, i_{body,0}\}$ lokal zu linearisieren, wie in (2.58) bis (2.60) dargestellt und darauf einen linearen Regler anzuwenden.

Die Analyse der Pole des lokal linearisierten Systems in unterschiedlichen Arbeitspunkten, dargestellt im Anhang in der Tab. C.1 (die Spalten „Pole der Strecke“), deutet auf eine lokale Instabilität hin. Da die Steuerbarkeitsmatrix stets vollen Rang hat, ist das System vollständig steuerbar und kann mit einem Zustandsregler lokal stabilisiert werden.

Trotz dieser Möglichkeit wird zunächst die Methode der exakten Linearisierung angewendet, das resultierende System analysiert und mit dem lokal linearisierten verglichen. Wie später gezeigt, hat das mit der exakten Linearisierung behandelte System gewisse Vorteile gegenüber dem lokal linearisierten System.

Erneut werden die gleichen Größen wie im Zustand S_3 als Ausgangsfunktionen³⁴ definiert

$$\mathbf{y}_{S_1} = \mathbf{h}_{S_1}(\mathbf{v}_{S_1}) = \begin{bmatrix} y_{S_1,1}(\mathbf{v}_{S_1}) \\ y_{S_1,2}(\mathbf{v}_{S_1}) \\ y_{S_1,3}(\mathbf{v}_{S_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ \rho \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Die Koordinatentransformation muss gegenüber S_3 entsprechend (5.19) und (5.20) mit zusätzlichen Funktionen $\psi_7(\mathbf{x}_{S_1})$ und $\psi_8(\mathbf{x}_{S_1})$ vervollständigt werden. Damit eine gültige Transformation entsteht, muss die *Jacobi*-Matrix von $\boldsymbol{\psi}_{S_1}$ nicht singulär sein. Zwei der einfachsten Funktionen, mit

³⁴ Als Ausgangsfunktion ergibt $\mathbf{y}_{S_1} = [l, \phi, \theta]^T$ bezüglich der Stabilität des ganzen Systems qualitativ keine Änderungen gegenüber (5.40). Mit der Ausgangsfunktion (5.40) erhält man zumindest eine Einheitlichkeit mit dem Zustand S_3 .

denen diese Bedingung erfüllt wird, sind $\psi_7(\mathbf{x}_{S_1}) = \phi$ und $\psi_8(\mathbf{x}_{S_1}) = \dot{\phi}$. Somit entsteht erneut eine triviale Transformation

$$\mathbf{z}_{S_1} = \boldsymbol{\Psi}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) = [l \quad \dot{l} \quad \rho \quad \dot{\rho} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T, \quad (5.41)$$

welche die originalen Zustandsvariablen \mathbf{x}_{S_1} in die neuen Zustandsvariablen \mathbf{z}_{S_1} (in der allgemeinen Schreibweise) überführen.

Gegenüber dem vorherigen Fall S_3 ist jetzt nur eine partielle Linearisierung möglich, weil der relative Grad $r = 6$ kleiner als die Ordnung des Systems $n_{\mathbf{v},S_1} = 8$ ist. Die Entkopplungsmatrix $\mathbf{R}_{A,S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ hat die gleiche Form wie (5.23) deren Werte $L_{\mathbf{g}_{S_1,k}} L_{\mathbf{f}_{S_1}} y_{S_1,q}$, $k \in \{1,2,3\}$, $q \in \{1,2,3\}$ im Anhang mit (C.20) dargestellt sind. Die Werte $L_{\mathbf{f}_{S_1}}^2 y_{S_1,q}$, $q \in \{1,2,3\}$, des entsprechenden Vektors $\mathbf{R}_{b,S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ sind mit (C.18) dargestellt.

Das Regelgesetz in der Form (5.24) mit dem Rückkopplungsglied $\mathbf{r}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1})$ und dem Vorsteuerglied $\mathbf{v}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1})$ erhält ebenfalls die gleiche Form, jedoch mit geänderten Werten, die mit (C.23) bzw. (C.25) dargestellt sind. Die Struktur der exakten Linearisierung ist in Abb. 5.9 dargestellt. Die zusätzliche stabilisierende Rückführung mit der Verstärkung \mathbf{K}_{lin} ist gestrichelt dargestellt, weil diese bei der weitergehenden theoretischen Behandlung der Nulldynamik (Kapitel 5.5.1) nicht benötigt wird.

Mit dem Einbeziehen des Regelgesetzes der Form (5.24) in die Strecke (5.14) ergibt sich das partiell linearisierte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{S_1} &= \mathbf{f}_{f_l,S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) + \mathbf{g}_{f_l,S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_{S_1} &= \mathbf{h}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) \end{aligned} \quad (5.42)$$

mit

$$\mathbf{f}_{f_l,S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} \dot{l} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \\ 0 \\ -\frac{RC_{v,S_1,1} + C_{v,S_1,2}}{RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

und

$$\mathbf{g}_{fl,S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{RH_{v,S_1,11} + H_{v,S_1,12}}{RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22}} & -\frac{RH_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,23}}{RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Die Ausgangsfunktion \mathbf{h}_{S_1} bleibt auch hier unverändert. Weiterhin kann das System in den neuen Koordinaten nach der Aufteilung $\mathbf{z}_{S_1} = [\xi_{S_1} \quad \eta]^T$, wie im Kapitel 2.4.2 beschrieben, dargestellt werden. Die Variable ξ_{S_1} der externen Dynamik entspricht der Variable im Zustand S_3 , $\xi_{S_1} = \xi_{S_3}$ in (5.30). Die Variable der restlichen, internen Dynamik η beinhaltet die Größen $z_{S_1,7} = \phi$ und $z_{S_1,8} = \dot{\phi}$

$$\eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Das Gesamtsystem im Zustand S_1 nach der Anwendung der exakten Linearisierung besteht aus folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{S_1} &= \mathbf{A}_{fl,S_1} \xi_{S_1} + \mathbf{B}_{fl,S_1} \mathbf{v} \\ \dot{\eta} &= \mathbf{w}(\xi_{S_1}, \eta) + \mathbf{t}(\xi_{S_1}, \eta) \mathbf{R}_{A,S_1}^{-1}(\xi_{S_1}, \eta) (\mathbf{v} - \mathbf{R}_{b,S_1}(\xi_{S_1}, \eta)) \\ \mathbf{y}_{S_1} &= \mathbf{C}_{fl,S_1} \xi_{S_1}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

5.5.1 Nulldynamik

Die Nulldynamik wird in Analogie zu der Beschreibung in Kapitel 2.4.2 nach Gleichungen (2.81) und (2.82) bestimmt. Die Nulldynamik beschreibt den Teil der internen Dynamik des partiell exakt linearisierten Systems (5.46), welcher übrig bleibt, wenn die externe Dynamik mit der beteiligten Variable ξ_{S_1} ausklingt. Statt den speziellen Fall $\xi_{S_1} = \mathbf{0}$ zu betrachten, wird hier der allgemeinere Fall betrachtet

$$\xi_{S_1} = \xi_{S_1,0} = [0 \quad 0 \quad \rho_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (5.47)$$

Dieser ermöglicht die Analyse der Nulldynamik für unterschiedliche konstante Oberkörperwinkel ρ_0 .

In Analogie zu (2.81) erhält man die Eingangsgrößen \mathbf{i}_{v,Z,S_1} des Systems der Nulldynamik aus der Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{b,S_1}(\xi_{S_1,0}, \eta) + \mathbf{R}_{A,S_1}(\xi_{S_1,0}, \eta) \mathbf{i}_{v,Z,S_1}. \quad (5.48)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{i}_{v,Z,S_1} = \begin{bmatrix} i_{long,Z,S_1} \\ i_{body,Z,S_1} \\ i_{yaw,Z,S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R(H_{v,S1,22}C_{v,S1,1} - H_{v,S1,12}C_{v,S1,2})}{K_m i_{G,wh}(RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22})} \\ \frac{C_{v,S1,3}(RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}) - H_{v,S1,23}(RC_{v,S1,1} + C_{v,S1,2})}{K_m i_{G,bd}(RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22})} \\ \frac{RC_{v,S1,4}}{B_w K_m i_{G,wh}} \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Mit dem Einsetzen von \mathbf{i}_{v,Z,S_1} in die Gleichung der Nulldynamik analog zu (2.82) folgt schließlich die Nulldynamik des SCD im Zustand S_1 für den Fall der Ausgangsfunktion (5.40)

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}_{S_1,0}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ -\frac{RC_{v,S1,1} + C_{v,S1,2}}{RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Zu beachten ist, dass in (5.49) und (5.50) die einzelnen Variablen der Elemente des nichtlinearen Modells H und C jetzt teilweise konstant sind $H_{v,S1,jk} = H_{v,S1,jk}(\boldsymbol{\xi}_{S_1,0}, \boldsymbol{\eta})$ und $C_{v,S1,j} = C_{v,S1,j}(\boldsymbol{\xi}_{S_1,0}, \boldsymbol{\eta})$, für $\{j, k\} \in \{1, 2, 3, 4\}$. Speziell ist der Wert von $C_{v,S1,4}(\boldsymbol{\xi}_{S_1,0}, \boldsymbol{\eta}) = 0$, was erwartungsgemäß zu $i_{yaw,Z,S_1} = 0$ führt.

Die Ruhelagen erhält man, wenn $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}$, was auf die Ruhelagekennlinie (4.82) führt. Die Eigenwerte der in den Ruhelagepunkten lokal linearisierten Nulldynamik (5.50) $\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ befinden sich jeweils auf der positiven und negativen Realachse der komplexen s -Ebene (Sattelpunkt in der Phasenebene). Daher sind die Ruhelagepunkte lokal instabil.

Für eine kompakte Darstellung der Nulldynamik (5.50), welche ein System zweiter Ordnung der Form $\ddot{\phi} = f(\phi, \dot{\phi}, \rho_0)$ darstellt, ist ein Phasenporträt besonders geeignet, Abb. 5.7.

Anfangswerte außerhalb der Ruhelage. Das Phasenporträt Abb. 5.7 wurde für $\rho_0 = 0$ mit unterschiedlichen konkreten Anfangszuständen $\boldsymbol{\eta}_0^* = [\phi_0, \dot{\phi}_0 = 0]^T$ (mit einem Punkt gekennzeichnet) erstellt. Der Verlauf der Größen $\phi(t)$ und $\dot{\phi}(t)$, welche die Komponenten der Nulldynamik $\boldsymbol{\eta}$ darstellen, ist entlang der jeweiligen Kurve mit dem Pfeil gekennzeichnet. Ein zeitlicher Verlauf der Nulldynamik mit dem Einbeziehen der Eingangskomponenten \mathbf{i}_{v,Z,S_1} ist im Anhang (Abb. C.4) dargestellt.

Das Ergebnis der exakten Linearisierung ist eine ausgeglichene longitudinale Position l , ein ausgeglichener Winkel des Oberkörpers ρ und eine ausgeglichene Drehung Θ . Während diese Komponenten, welche die Variable $\boldsymbol{\xi}_{S_1}$ bilden, konstant beim Wert $\boldsymbol{\xi}_{S_1,0}$ bleiben, ändern sich nur die Komponenten der Nulldynamik $\boldsymbol{\eta}$ (Neigung ϕ und Neigungsgeschwindigkeit $\dot{\phi}$). Aus dem doppelt inversen Pendel, welches sich entlang des Bodens bewegen konnte und seinen Oberkörperwinkel verstellen konnte, ist ein einfaches inverses Pendel geworden, dessen Drehpunkt im Raum fixiert ist.

Aus dem Phasenporträt Abb. 5.7 ist ersichtlich, dass kleine Unterschiede in Anfangszuständen keine großen Abstände im Verlauf der Phasentrajektorien verursachen. Die zeitlichen Verläufe in Abb. C.4 zeigen jedoch immer größer werdende Unterschiede, die selbst bei kleinsten Unterschieden in Anfangszuständen nach gewisser Zeit hervorkommen würden. Daher sind diese periodischen Verläufe zwar orbital stabil³⁵ [46], aber instabil im Sinne von *Ljapunov*³⁶ [46].

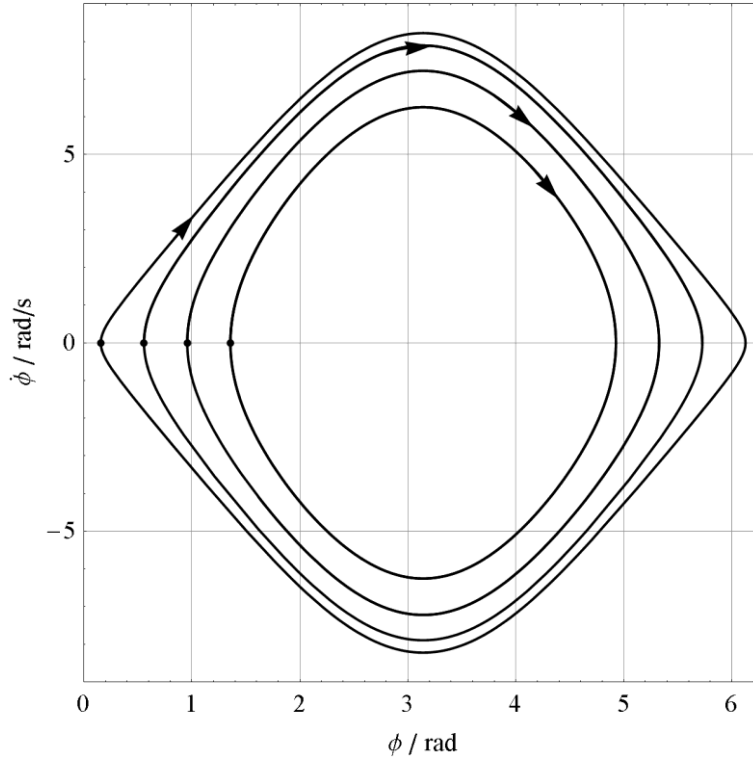


Abb. 5.7: Phasenporträt der Nulldynamik im Fall der Ausgangsfunktion (5.40) für die Anfangswerte $\{\phi_0 = \{0.157, 0.557, 0.957, 1.357\} \text{ rad}, \dot{\phi}_0 = 0 \text{ rad/s}\}$ und $\rho_0 = 0 \text{ rad}$.

Die Nulldynamik in Abb. 5.7 hat beim realen SCD nur in einem bestimmten begrenzten Raum Gültigkeit. Wenn sich das SCD auf ebenem Boden befindet, dann ist der reale Wert von ϕ auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ begrenzt, weil der Oberkörper des SCD in der Realität nicht in den Boden eindringen kann. Trotzdem liefert es, wie sich im Folgenden zeigt, wertvolle Informationen über das Verhalten des SCD in dem betrachteten Fall der Ausgangsfunktion (5.40).

Anfangswerte der Ruhelage. Eine weitere Betrachtung der Nulldynamik für Anfangswerte der Ruhelagen $\{\phi_0, \dot{\phi}_0 = 0 \text{ rad/s}\}$, $\rho_0 = f_{bal}(\phi_0)$, wobei die Funktion $f_{bal}(\phi_0)$ der Ruhelage (4.81) entspricht, ist in der Abb. 5.8 dargestellt. Da sich die Verläufe der Nulldynamik mit dem erwähn-

³⁵ Definition für den Fall eines zeitvarianten Systems [46]: die Lösung $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}_0^*, t_0; t)$ ist *orbital stabil*, wenn für jedes beliebig kleines $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ und eine Funktion $t_1(t)$ existieren, derart, dass $\|\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}_0^*\| < \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}_0, t_0; t) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}_0^*, t_0; t_1(t))\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

³⁶ Definition für den Fall eines zeitvarianten Systems [46]: die Lösung $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}_0^*, t_0; t)$ ist *stabil* (im Sinne von *Ljapunov*), wenn für jedes beliebig kleines $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, derart, dass $\|\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}_0^*\| < \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}_0, t_0; t) - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}_0^*, t_0; t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

ten Anfangswert theoretisch aus dem Punkt $\{\phi_0, \dot{\phi}_0 = 0 \text{ rad/s}\}$ für $\rho_0 = f_{bal}(\phi_0)$ nicht entwickeln (die Ruhelagepunkte entsprechen den Singulärpunkten in der Phasenebene [44]), wurden stattdessen die Anfangswerte für den Winkel leicht geändert und auf den Wert $\{\phi_0 \pm 0.01 \text{ rad}, \dot{\phi}_0 = 0 \text{ rad/s}\}$ gesetzt. Abhängig von dem Anfangswert $\phi_0 \pm 0.01 \text{ rad}$ entwickeln sich die Verläufe in entgegengesetzte Richtungen (Abb. 5.8). Der Oberkörper des SCD bleibt mit den idealen Ruhelagewerten in der aufrechten Position. Die kleinste Störung, oder wie hier angewendet, ein leicht geänderter Anfangswinkel, versetzt den Oberkörper des SCD in dauerhafte Oszillationen. Die Anfangsrichtung der Oszillationen ist dabei von dem Wert der Anfangswinkeländerung abhängig. Ein zeitlicher Verlauf der Nulldynamik unter Berücksichtigung der Eingangskomponenten \mathbf{i}_{v,z,s_1} ist im Anhang in Abb. C.5 dargestellt.

Dies stellt die Instabilität der Ruhelagen $\{\phi_0, \rho_0 = f_{bal}(\phi_0)\}$ der Nulldynamik im Sinne von *Ljapunov* [46] deutlich dar. Wegen der Instabilität der Nulldynamik ist diese, in Analogie zu linearen Systemen, als nicht minimalphasig bezeichnet [48].

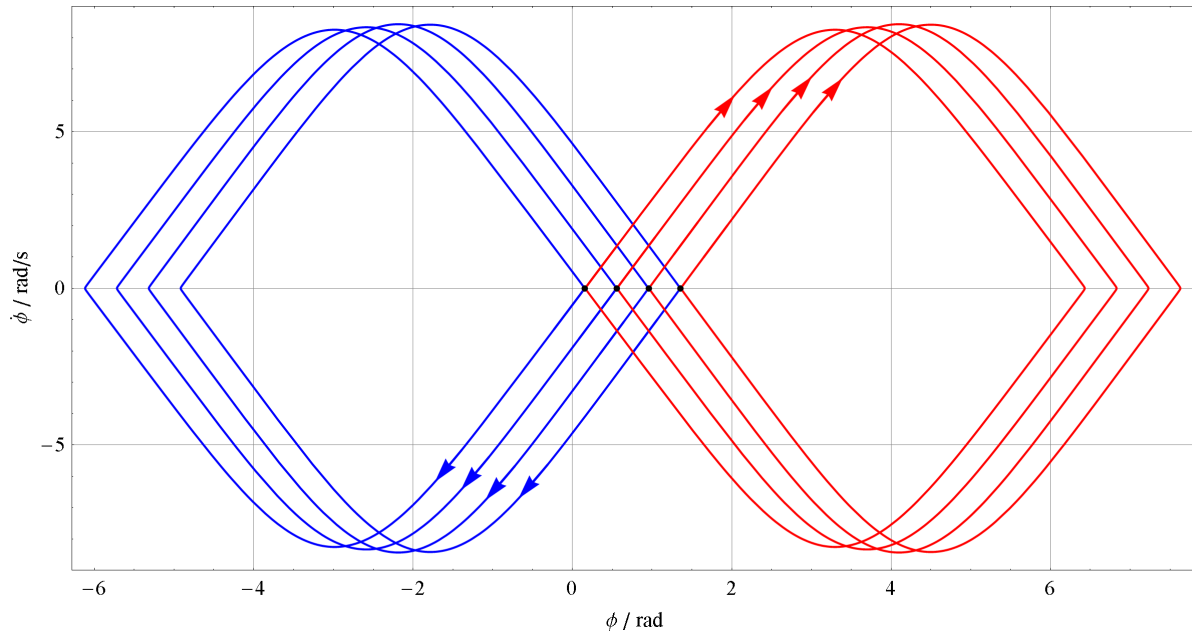


Abb. 5.8: Phasenporträt der Nulldynamik im Fall der Ausgangsfunktion (5.40) für die Anfangswerte $\{\phi_0 = \{0.157, 0.0557, 0.957, 1.357\} \pm 0.01 \text{ rad}, \dot{\phi}_0 = 0 \text{ rad/s}\}$ und $\rho_0 = f_{bal}(\phi_0) \text{ rad}$.

5.5.2 Stabilisierung

Um die Aufrechterhaltung des SCD im Zustand S_1 zu gewährleisten, was zur grundlegenden Funktionalität des SCD gehört, ist eine zusätzliche Maßnahme erforderlich, welche das SCD in unterschiedlichen aufrechten Ruhelagen lokal stabilisiert. Dabei liegt der Schwerpunkt der Entwicklung auf der Machbarkeit dieser Teilfunktionalität und weniger auf den quantitativen dynamischen Eigenschaften. Mit dem Hintergedanken, dass die Stellgrößen am realen SCD begrenzt³⁷ sind, ist eine hochdynamische Regelung, welche die Gültigkeit in einer breiten Umgebung des SCD-

³⁷ Der Strom des Oberkörperantriebes $i_{body,0}$ beträgt im Arbeitspunkt $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ etwa 70% des maximalen Aktorstroms.

Arbeitsbereiches hätte, nicht realisierbar. Aus dieser Betrachtung ist eine lineare Zustandsregelung, deren Gültigkeit in einer kleineren Umgebung des SCD-Arbeitsbereiches besteht, sinnvoll. Ein weiterer Punkt für diese Entscheidung ist der relativ geringe Entwurfsaufwand des Reglers.

In der Einleitung des Kapitels 5.5 wurde bereits erwähnt, dass das SCD ohne Behandlung durch die partielle exakte Linearisierung, mit einem linearen Zustandsregler lokal stabilisiert werden kann. Trotzdem wird an dieser Stelle das System (5.46), welches als Ergebnis der partiellen exakten Linearisierung erhalten wurde, betrachtet. Da das Gesamtsystem wegen der instabilen Ruhelage der Nulldynamik instabil ist, wird die ganzheitliche Betrachtung aller Systemvariablen $[\xi_{S_1}, \eta]^T$ benötigt. Die lokale Linearisierung des Systems (5.46) ist nur für die interne Dynamik notwendig, weil die externe Dynamik bereits durch die exakte Linearisierung in der linearen Form vorhanden ist. Somit ergibt sich mit Anwendung einer lokalen Linearisierung im Arbeitspunkt $\{\xi_{S_1,0}, \eta_0, \mathbf{v}_0\}$ folgendes lokal linearisierte System des SCD im Zustand S_1

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \xi_{S_1} \\ \Delta \eta \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{fl,S_1} & \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_\eta & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{S_1}} \begin{bmatrix} \Delta \xi_{S_1} \\ \Delta \eta \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{fl,S_1} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{long} & b_{body} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{S_1}} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{y}_{S_1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{fl,S_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{S_1}} \begin{bmatrix} \Delta \xi_{S_1} \\ \Delta \eta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Der Arbeitspunkt ist durch die betrachtete Ruhelage $\rho_0 = f_{bal}(\phi_0)$ bestimmt. Daher ändern sich mit dem Arbeitspunkt nur die Winkel ϕ_0 und ρ_0 . Somit sind alle anderen Einträge von $\{\xi_{S_1,0}, \eta_0, \mathbf{v}_0\}$ gleich Null, $\xi_{S_1,0} = [0, 0, \rho_0, 0, 0, 0]^T$, $\eta_0 = [\phi_0, 0]^T$ und $\mathbf{v}_0 = [0, 0, 0]^T$. Mit der Bezeichnung Δ sind die jeweiligen Abstände der betrachteten Größe zu dem Arbeitspunkt bezeichnet: $\Delta \xi_{S_1} = \xi_{S_1} - \xi_{S_1,0}$, $\Delta \eta = \eta - \eta_0$, $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ und $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}_{S_1} - \mathbf{y}_0$. Die Matrizeneinträge der zusammengefassten Systemmatrix $\mathbf{A}_{S_1} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ und Eingangsmatrix $\mathbf{B}_{S_1} \in \mathbb{R}^{8 \times 3}$ sind abhängig vom Arbeitspunkt: $a_\xi(\phi_0, \rho_0)$, $a_\eta(\phi_0, \rho_0)$, $b_{long}(\phi_0, \rho_0)$ und $b_{body}(\phi_0, \rho_0)$. Diese Werte sind im Anhang mit den Gleichungen (C.27) bis (C.30) und graphisch in der Abb. C.6 dargestellt. Die Pole folgen aus der Matrix \mathbf{A}_{S_1} und sind exemplarisch für vier Arbeitspunkte ebenfalls im Anhang in Tab. C.1 dargestellt. Die Stabilität ist gekennzeichnet durch einen sechsfachen Pol im Koordinatenursprung der s -Ebene, welcher als Ergebnis der partiellen exakten Linearisierung entsteht und jeweils zwei reellen Werten von $\approx \pm 3.4$, welche der Nulldynamik entsprechen.

Das System ist also instabil, aber auch vollständig steuerbar, weshalb es durch einen linearen Regler lokal stabilisiert werden kann. Nach dem *Gain Scheduling*-Prinzip (Anhang, Kapitel C.5.1) kann bei Systemen mit veränderlicher Dynamik entlang des Arbeitsbereiches für jeden beliebigen Arbeitspunkt jeweils ein linearer Regler entworfen werden. Die Dynamik des erhaltenen Systems (5.51) ändert sich im gesamten Arbeitsbereich des SCD deutlich weniger als die Dynamik des ursprünglichen Systems (5.14) (Vergleich der Pole in Tab. C.1). Ebenso ist das System (5.51) durch die Aufschaltung der stationären Größe von $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ befreit, weil die physikalischen Aktorgrößen im stationären Fall $\mathbf{i}_v(\phi_0, \rho_0)$ bereits mit dem unterlagerten Regelgesetz der partiellen exakten Linearisierung aufgeschaltet sind. Das Stabilisieren des partiell exakt linearisierten Systems kann gegenüber dem Stabilisieren des ursprünglichen Systems als Behandlung eines reduzierten Prob-

lems angesehen werden. Daher wird der *gain scheduling* LQ-Regler auf das partiell exakt linearisierte System (5.51) angewendet.

Die Aufgabe des stabilisierenden Reglers ist die Aufrechterhaltung der Ruhelage. Es stehen dabei zwei Eingangsgrößen zur Verfügung (i_{long} und i_{body}) zur Beeinflussung der longitudinalen Dynamik (Koordinaten l , ϕ und ρ). Die dritte Eingangsgröße i_{yaw} beeinflusst die Drehdynamik des SCD Θ .

Bei der longitudinalen Dynamik (Zustandsvariablen $[l, \dot{l}, \rho, \dot{\rho}, \phi, \dot{\phi}]^T$) entscheidet man sich für einen Zustandsregler, dessen Parameter nach der Lösung des LQ-Problems (Anhang, Kapitel C.5.2) bestimmt wurden. Es besteht die Möglichkeit, beide Aktoren in die Erfüllung der Aufgabe einzubeziehen. Durch bestimmte Gewichtungen der Matrizen im Gütefunktional (C.38) können die Zustandsvariablen und Eingangsgrößen des Regelungssystems „bestraft“ werden. Eine höhere Gewichtung der zugehörigen Größe wirkt sich mit der Minderung von deren Amplitude aus. Die Wahl der Gewichtungen wurde am Modell in Simulationen vorläufig festgelegt und am realen SCD den realen zusätzlichen Einflüssen angepasst.

Die Gewichtungen (5.52) wurden so gewählt, dass eine höhere dynamische Aktivität der Stellgröße i_{long} als i_{body} in der Regelung des SCD entsteht. Der Grund ist, dass die Eingangsgröße i_{body} für das Tragen des SCD-Gewichtes zuständig ist, was im stationären Fall bereits 70% der max. Stellgröße betragen kann. Zusätzliche Anteile von i_{body} müssen für die „normale“ Dynamik beim Ändern des Oberkörperwinkels ρ verfügbar sein. Somit bleibt wenig Spielraum für die Aktivität dieser Eingangsgröße hinsichtlich der Stabilisierung. In der aktuellen Entwicklungsstufe des SCD wird die Stabilisierung hauptsächlich über die Stellgröße i_{long} umgesetzt. Nachteilhaft dabei sind größere Amplituden der Position l bezüglich Störungen.

Mit folgenden Werten wurde ein zufriedenstellender Kompromiss erreicht, der die grundlegende Funktionalität des SCD ermöglicht

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{long} &= 100 \times \text{diag}(100, 30, 50000, 1000, 10, 3), \\ \mathbf{R}_{long} &= \text{diag}(20, 10). \end{aligned} \tag{5.52}$$

Mit den Werten (5.52) erhält man den Zustandsregler der longitudinalen Dynamik $\mathbf{K}_{S_1, long}$, dessen Werte und die daraus folgenden Pole des geschlossenen Regelkreises exemplarisch im Anhang (Kapitel C.5.3) für zwei Arbeitspunkte dargestellt sind.

Die Drehdynamik (Zustandsvariablen $[\Theta, \dot{\Theta}]^T$) des SCD wird separat durch einen Zustandsregler mittels Polvorgabe festgelegt. Als Pole des geschlossenen Regelkreises wurden folgende Werte gewählt

$$\{s_{yaw,1}, s_{yaw,2}\} = \{-4, -4\}, \tag{5.53}$$

welche ein Verhalten mit kritischer Dämpfung gewährleisten. Der Zustandsregler für die Drehdynamik $\mathbf{K}_{S_1, yaw}$ kann mittels *Ackermann* Formel [51] bestimmt werden (Reglerparameter sind im Kapitel C.5.3 dargestellt). Da die Drehdynamik nach der Behandlung der exakten Linearisierung

Das System $\mathbf{T}_{stab}(s)$ hat durch die Rückkopplung \mathbf{K}_{S_1} die gewünschte Eigendynamik, aber das stationäre Verhalten und das Führungsverhalten sind weiterhin nicht optimal. In dieser Hinsicht werden zu der Zustandsregelung ein statischer Vorfilter $\mathbf{F}_{st,1}$ und ein Geschwindigkeitsvorfilter $\mathbf{F}_{st,2}$ hinzugefügt

$$\Delta \mathbf{v}(s) = \underbrace{(\mathbf{F}_{st,1} + s \mathbf{F}_{st,2}) \Delta \xi_s(s)}_{\Delta \xi_s^*(s)} - \mathbf{K}_{S_1} \begin{bmatrix} \Delta \xi_{S_1}(s) \\ \Delta \eta(s) \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Der statische Vorfilter wird nach [51] berechnet, um die Regelabweichung $\mathbf{e}_{S_1}(s)$

$$\mathbf{e}_{S_1}(s) = (\mathbf{E} - \Delta \mathbf{y}_{S_1}(s)) \Delta \xi_s(s) \quad (5.58)$$

im stationärem Zustand zu kompensieren (konkrete Werte im Anhang, Kapitel C.5.3)

$$\mathbf{F}_{st,1} = -(\mathbf{C}_{S_1} (\mathbf{A}_{S_1} - \mathbf{B}_{S_1} \mathbf{K}_{S_1})^{-1} \mathbf{B}_{S_1})^{-1}. \quad (5.59)$$

Der Geschwindigkeitsvorfilter $\mathbf{F}_{st,2}$ wird anhand der Vorgabe bestimmt, die Regelabweichung $\mathbf{e}_{S_1}(s)$ auf eine rampenförmige Sollgröße

$$\Delta \xi_s(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \quad (5.60)$$

zu kompensieren. Mit dem Einsetzen der Sollgröße (5.60) und des Regelgesetzes (5.57) unter Berücksichtigung von (5.56) und (5.58) folgt die Regelabweichung

$$\mathbf{e}_{S_1}(s) = \left(\mathbf{E} \frac{1}{s} - \mathbf{T}_{stab}(s) \left(\mathbf{F}_{st,1} \frac{1}{s} + \mathbf{F}_{st,2} \right) \right) \frac{1}{s}. \quad (5.61)$$

Die Regelabweichung soll im stationären Fall verschwinden $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_{S_1}(t) = \mathbf{0}$. Nach dem Grenzwertsatz ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_{S_1}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{e}_{S_1}(s)$ und mit dem Einsetzen von (5.61) folgt

$$\mathbf{F}_{st,2} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\mathbf{T}_{stab}^{-1}(s) (\mathbf{E} - \mathbf{T}_{stab}(s) \mathbf{F}_{st,1}) \frac{1}{s} \right]. \quad (5.62)$$

Dessen Werte sind exemplarisch im Anhang (Kapitel C.5.3) für zwei Arbeitspunkte dargestellt.

5.6 Zustandsübergänge

In den Kapiteln 5.4 und 5.5 wurde die Regelung des SCD im jeweiligen diskreten Zustand S_3 bzw. S_1 behandelt. Eine weitere Aufgabe stellen die Zustandsübergänge dar. Einen Teil der grundlegenden Funktionalität stellt das Treppensteigen dar, was durch abwechselnde Zustandsübergänge $S_1 \rightarrow S_3$ und $S_3 \rightarrow S_1$ ermöglicht wird. Es sind weitere Zustandsübergänge möglich, aber nicht er-

wünscht und sollen daher verhindert werden. Ebenso soll der Zustandsübergang möglichst ohne Oszillationen (also stetig wechselnde Zustandsübergänge) stattfinden. Im Folgenden werden realistische Zustandsübergänge des SCD beschrieben.

Die Treppe wird mit einer von Null unterschiedlichen Höhe $\delta_{st} \neq 0$ eingeführt und im Speziellen in Kapitel 6.2 behandelt. In diesem Kapitel werden jedoch die Zustandsübergänge am ebenen Boden betrachtet $\delta_{st} = 0$. Dieser Spezialfall bildet alle relevanten Phänomene, die während des Treppensteigens auftreten, ab.

Das geregelte SCD hat in den Zuständen S_1 und S_3 die Freiheitsgrade l , ρ und θ (in S_1 zusätzlich ϕ). Da eine Drehung in S_3 nicht möglich ist, soll bei einem Zustandsübergang keine Änderung des Drehwinkels auftreten $\dot{\theta} = 0$. Weiterhin soll die Amplitude des longitudinalen Wegs l möglichst klein gehalten werden, weil in Treppennähe oder auf den Stufen wenig Platz zur Verfügung steht. Die Hauptgrößen eines Zustandsübergangs sollen also die Größen des Neigungswinkels ϕ und des Oberkörpers ρ sein.

Der hybride Zustand $\mathcal{H}_{1,0}$ des SCD besteht aus dem diskreten Zustand S_1 und dem Zustandsvektor \mathbf{x}_{S_1} wobei hier, wie bereits beschrieben, nur die Größen ϕ und ρ und deren Geschwindigkeiten betrachtet werden

$$\mathcal{H}_{1,0} = \left\{ S_1, \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \phi_0 < \frac{\pi}{2} \\ \rho_0 = f_{bal}(\phi_0) \\ \dot{\phi}_0 = 0 \\ \dot{\rho}_0 = 0 \end{array} \right\} \right\}. \quad (5.63)$$

Die Beschreibung von $\mathcal{H}_{1,0}$ (Abb. 5.10, (a)) lässt für den Unterkörper ϕ einen Bereich von $-\frac{\pi}{2} < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$ in der aufrechten Lage zu. Die Lage des Oberkörpers ist dabei mit der Ruhelagefunktion $\rho_0 = f_{bal}(\phi_0)$ bestimmt.

Der hybride Zustand $\mathcal{H}_{3,0}$ (Abb. 5.10, (c)) beschreibt die Ruhelage des SCD bei Kontakt aller Räder mit dem Boden

$$\mathcal{H}_{3,0} = \left\{ S_3, \left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = \frac{\pi}{2} \\ f_{bal}\left(\frac{\pi}{2}\right) < \rho_0 < f_{bal}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \dot{\phi}_0 = 0 \\ \dot{\rho}_0 = 0 \end{array} \right\} \right\}. \quad (5.64)$$

Die Lage des Oberkörpers befindet sich innerhalb der Ruhelagegrenze, außerhalb welcher ein Kippen des SCD anfangen würde, weil eine der Normalkräfte zum Boden (λ_3 oder λ_4) kleiner als Null wäre.

Eine kritische Situation beschreibt die Situation (b) in Abb. 5.10. Diese grenzt die beschriebenen hybriden Zustände $\mathcal{H}_{1,0}$ und $\mathcal{H}_{3,0}$ ab. Die Lage des Unterkörpers beträgt genau $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, die Lage des Oberkörpers befindet sich in der Ruhelage $\rho_0 = f_{bal}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und die Normalkraft der Vorderräder

$\lambda_4 = 0$. Diese Ruhelage des SCD ist sowohl im diskreten Zustand S_1 als auch in S_3 möglich, was davon abhängig ist, ob der Kontakt der Vorderräder zum Boden vorhanden ist. Die Zweideutigkeit dieser Lage ist mit dem gestrichelten Boden in Abb. 5.10 (b) dargestellt. Dieser Zustand $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ wird als kritischer Zustand bezeichnet

$$\mathcal{H}_{13,0,crit} = \left\{ \frac{S_1}{S_3}, \left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = \frac{\pi}{2} \\ \rho_0 = f_{bal}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \dot{\phi}_0 = 0 \\ \dot{\rho}_0 = 0 \end{array} \right\} \right\}. \quad (5.65)$$

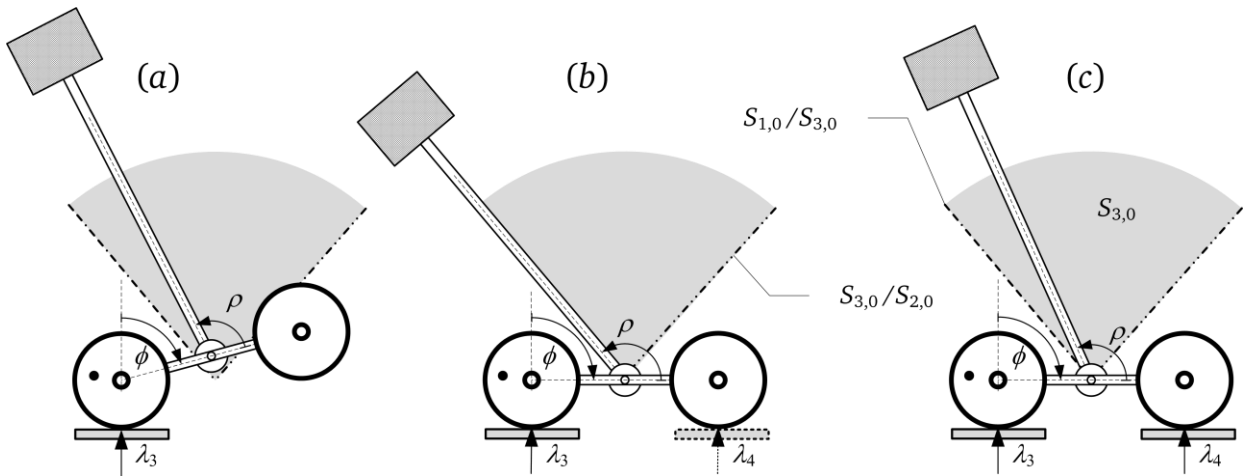


Abb. 5.10: (a) bezeichnet den Zustand $\mathcal{H}_{1,0}$, (b) den Zustand $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ (c) den Zustand $\mathcal{H}_{3,0}$. Der grau eingezeichnete Kreissektor stellt mögliche Ruhelagen des Oberkörperwinkels ρ im Zustand $\mathcal{H}_{3,0}$ dar. Die Strich-Strich-Punkt Linie stellt den Grenzwert $\rho_0 = f_{bal}(\pi/2)$ zum quasistationären Übergang zwischen hybriden Zuständen $\mathcal{H}_{1,0}$ und $\mathcal{H}_{3,0}$ (entsprechend den diskreten Zuständen S_1 und S_3) dar. Die Strich-Punkt-Punkt Linie stellt den Grenzwert zum quasistationären Übergang zwischen S_3 und S_2 dar.

Bedingungen für den Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Die Bedingungen zum Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ (in der vollständigen Bezeichnung $\mathcal{H}_{1,0} \rightarrow \mathcal{H}_{3,0}$) sind bereits mit $\mathcal{G}_{1 \rightarrow 3} = \mathcal{I}_{A,S_2} \wedge \mathcal{C}_{A,S_3}$ in (4.102) gegeben. Die Zusammensetzung macht die Notwendigkeit deutlich, dass es zu einem Stoß mit den Vorderrädern kommen muss \mathcal{I}_{A,S_2} (4.87) und dass die Abprallgeschwindigkeit Null sein muss \mathcal{C}_{A,S_3} (4.96). Es ist ersichtlich, dass im Fall der Kontaktaufnahme mit dem Boden ($\delta_{St} = 0$) die Bedingung für den Neigungswinkel erfüllt sein muss

$$\phi = \frac{\pi}{2} \wedge \dot{\phi} = 0. \quad (5.66)$$

Hat das SCD den Zustand S_3 erreicht, stellt sich die Frage bezüglich der Robustheit gegen kleine Störungen, die in der Realität eintreten können und das Verbleiben in S_3 gefährden. Bevor dieses Problem behandelt werden kann, müssen zunächst die Bedingungen zum Verlassen des Zustands

S_3 bzw. die Bedingungen zu den realistischen Übergängen $S_3 \rightarrow S_1$ und $S_3 \rightarrow S_2$ im Falle des geregelten SCD erläutert werden.

Bedingungen für den Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Dieser Zustandsübergang kommt durch die Bedingung $\mathcal{G}_{3 \rightarrow 1} = \mathcal{C}_{E,S_2}$ (4.98) als Konsequenz des Verschwindens der Normalkraft λ_4 zwischen dem Boden und den Vorderrädern zustande.

Da beim SCD in S_3 das Folgen einer beliebigen Trajektorie sichergestellt ist (Kapitel 5.4), können als Bedingung zum Abheben die kinematischen Größen des Oberkörpers verwendet werden $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho})$. Die Herleitung wird im Folgenden gegeben.

Mit Anwendung der Regelung des SCD in S_3 aus Kapitel 5.4 mit dem beschriebenen Regelgesetz (5.24) und entsprechenden Sollgrößen ist es möglich, nur eine Bewegung des Oberkörpers ρ zu bewirken, während die anderen Freiheitsgrade in Ruhezustand bleiben $\dot{l} = \ddot{l} = 0$ und $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Damit dies ermöglicht wird, müssen die Aktorgrößen folgende Werte annehmen

$$\begin{bmatrix} i_{long,S_3} \\ i_{body,S_3} \\ i_{yaw,S_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R(C_{v,S3,1}(\phi_0, \rho, 0, \dot{\rho}, 0) + \ddot{\rho}H_{v,S3,12}(\phi_0, \rho))}{K_m i_{G,wh}} \\ \frac{C_{v,S3,2}(\phi_0, \rho, \dot{\rho}, 0) + \ddot{\rho}H_{v,S3,22}}{K_m i_{G,bd}} \\ \frac{RC_{v,S3,3}(\phi_0, \rho, 0, \dot{\rho}, 0)}{B_w K_m i_{G,wh}} \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Der Parameter ϕ_0 hängt ausschließlich von der Stufenhöhe δ_{st} ab. Im hier betrachteten Fall des ebenen Bodens ist $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Der Ausdruck für die Normalkraft λ_4 wird aus dem Modell des SCD in abhängigen Koordinaten \mathbf{q} (4.59) im Zustand S_3 berechnet. Dieser ist als Abhängigkeit der Aktorströme und der SCD-Größen berechenbar $\lambda_4(i_l, i_r, i_{body}, \rho, \dot{\rho})$ ³⁸. Durch die Transformation der Aktorströme (4.71) und (4.72) und Einsetzen der Ausdrücke (5.67) erhält man schließlich den Ausdruck $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho})$. Dieser Ausdruck entspricht der Normalkraft λ_4 der Vorderräder in Abhängigkeit der Oberkörperbewegung. Für das Abheben der Vorderräder ist dabei entscheidend, dass die Normalkraft negativ³⁹ wird

$$\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0. \quad (5.68)$$

Der Ausdruck (5.68) wird als eine binäre Funktion in Abb. 5.11 dargestellt. Der eingefärbte Bereich zeigt den Wertebereich der Erfüllung von Bedingung (5.68). In Abb. 5.12 rechts ist der Schnitt bei $\ddot{\rho} = 0$ dargestellt. Hier ist ersichtlich, dass der stationäre Punkt $\rho_0 = f_{bal}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ aus Abb.

³⁸ Der Ausdruck wurde mit *Mathematica* hergeleitet. Wegen der Größe und Unübersichtlichkeit verzichtet man auf deren symbolische Darstellung.

³⁹ Streng genommen ist die Bedingung zum Abheben mit dem Ausdruck (4.98) $\lambda_4 = 0 \wedge \dot{\lambda}_4 < 0$ gegeben. Die Funktionen $\{\lambda_4, \dot{\lambda}_4\} \in \mathbb{R}^3$ wären in einem 6-Dimensionalen Raum schwer darstellbar. Deshalb entscheidet man sich für eine anschaulichere Darstellung des Bereiches $\lambda_4 < 0$. Analoges gilt für die Darstellung aller Bedingungen zum Abheben im vorhandenen Kapitel.

4.5 den Grenzwert im Fall $\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$ darstellt. Weiterhin ist ersichtlich, dass mit steigender Geschwindigkeitsamplitude vorzeichenunabhängig $|\dot{\rho}|$ bzw. offensichtlich mit dem Zentrifugalanteil $\dot{\rho}^2$ der Bereich zum Abheben wächst. Abb. 5.12 links gibt zusätzlich die Abhängigkeit von der Beschleunigung $\ddot{\rho}$, deren Einfluss auf die Trägheit zurückzuführen ist. Mit einer positiven Beschleunigung $\ddot{\rho}$ vergrößert sich der Bereich der verschwindenden Normalkraft der Vorderräder λ_4 . Das Gegenteil gilt für eine negative Beschleunigung.

Der Punkt $\{\phi_0 = \frac{\pi}{2}, \rho_0 = f_{bal}(\frac{\pi}{2}), \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0\}$ des kritischen Zustands $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ ist in Abb. 5.12 orange bezeichnet.

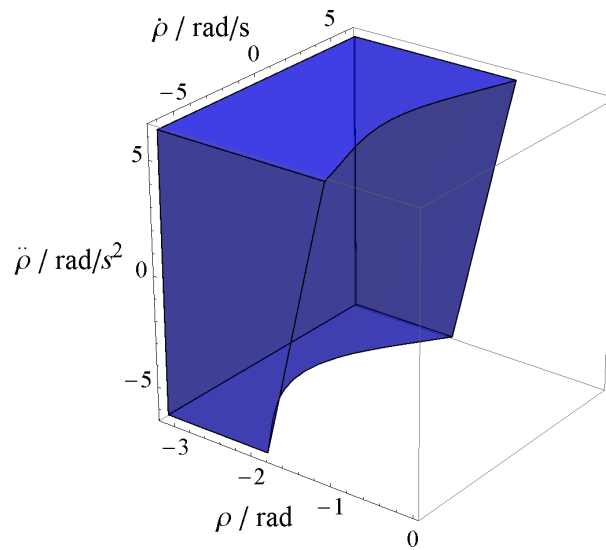


Abb. 5.11: Bereich der verschwindenden Normalkraft der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$, als Bedingung zum Abheben des SCD mit den Vorderrädern.

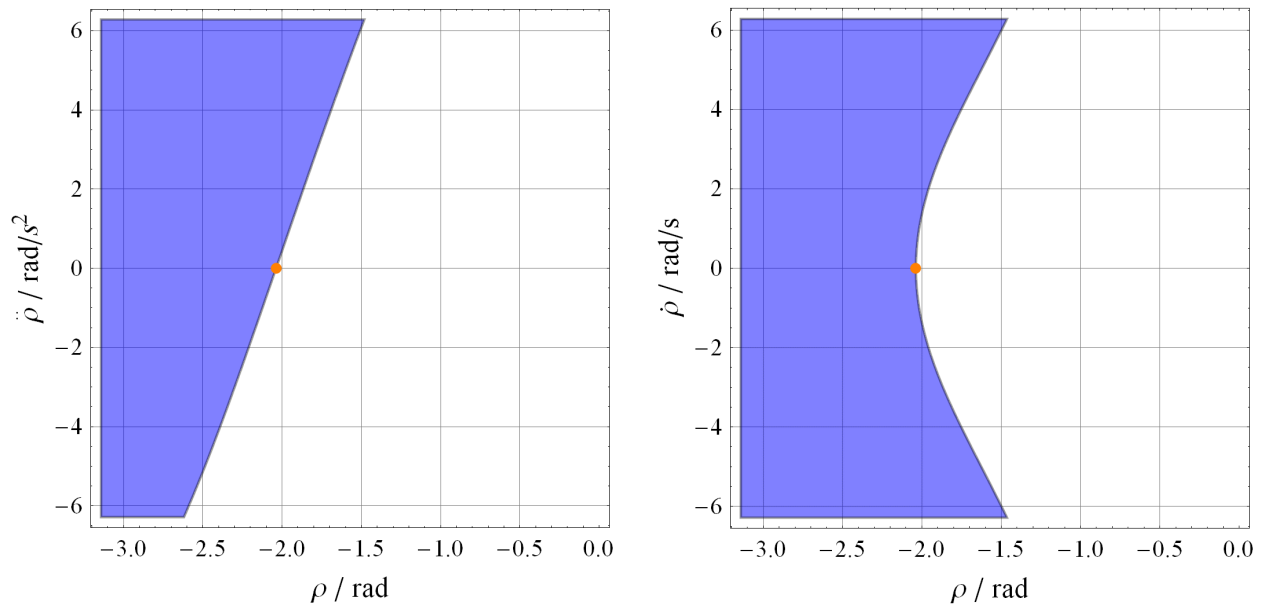


Abb. 5.12: Bereich der verschwindenden Normalkraft der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$. Schnitte bei $\dot{\rho} = 0$ (links) bzw. bei $\ddot{\rho} = 0$ (rechts). Punkt des kritischen Zustands $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ (orange).

Mit den gewonnenen Erkenntnissen kann auf das Verhalten des SCD nach dem Eintritt und Erhalt des Zustands S_3 geschlossen werden. Der Oberkörper ρ sollte außerhalb des Bereiches $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (Abb. 5.11 bzw. Abb. 5.12) mit ausreichendem Abstand zu $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ stehen und nur mit einer begrenzten Geschwindigkeit $\dot{\rho}$ und begrenzter Beschleunigung $\ddot{\rho}$ fahren. Für die Beschleunigung ist ein negativer Wert zu bevorzugen.

Bedingungen für den Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_2$. Dieser Zustandsübergang kommt durch die Bedingung $\mathcal{G}_{3 \rightarrow 2} = \mathcal{C}_{E,S_1}$ zu Stande (4.98), als Konsequenz des Verschwindens der Normalkraft λ_3 zwischen dem Boden und den Hinterrädern.

Die Normalkraft λ_3 erfolgt analog zu der Herleitung für die Normalkraft λ_4 beim Übergang $S_3 \rightarrow S_1$. Beim geregelten SCD erhält man die Normalkraft in Abhängigkeit der kinematischen Größen des Oberkörpers $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho})$. Analog zu (5.68) wird auch hier der Bereich dargestellt, in dem die Normalkraft erlischt

$$\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0. \quad (5.69)$$

Dieser kann erneut analog zu Abb. 5.11 dargestellt werden. Statt der einzelnen Darstellung der Bedingung (5.69) werden in Abb. 5.13 bzw. Abb. 5.14 gleichzeitig die Bedingung (5.68) und die Bedingung (5.69) dargestellt.

5.6.1 Strategien für die Zustandsübergänge

Nachdem die Bedingungen der Zustandsübergänge analysiert worden sind, kann als nächster Schritt die Entwicklung einer geeigneten Regelungsstrategie für die Zustandsübergänge $S_3 \rightarrow S_1$ und $S_1 \rightarrow S_3$ angegangen werden.

Strategie für den Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ kann relativ einfach mit einer geeigneten geregelten Bewegung des Oberkörpers in S_3 ausgelöst werden. Dazu muss das Abheben durch das Verschwinden der Normalkraft λ_4 herbeigeführt werden. Der Wertebereich dafür ist in Abb. 5.11 bzw. Abb. 5.12 dargestellt. Nach dem Abheben der Vorderräder muss auf die Regelung in S_1 umgeschaltet werden. Dabei ist zu verhindern, dass das SCD nicht erneut mit den Vorderrädern den Boden berührt, was eine Störung des dynamischen Verhaltens verursachen würde.

Um ein ungewolltes Abheben mit den Hinterrädern (das Eindringen in den Bereich $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$) zu vermeiden, sollte sich der Oberkörperwinkel ρ mit einem ausreichenden Abstand in dem begrenzten Bereich und nur mit einer begrenzten Geschwindigkeit $\dot{\rho}$ und begrenzter Beschleunigung $\ddot{\rho}$ bewegen.

Strategie für den Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ erweist sich als komplexer. Während die Bedingungen zum Eintritt in den Zustand S_3 mit der einfachen Bedin-

gung (5.66) ausgedrückt wird, steigt die Komplexität bei der Analyse des Aufrechterhaltens von Zustand S_3 . Die Beschreibung der Problematik beginnt im geregelten Zustand $\mathcal{H}_{1,0}$.

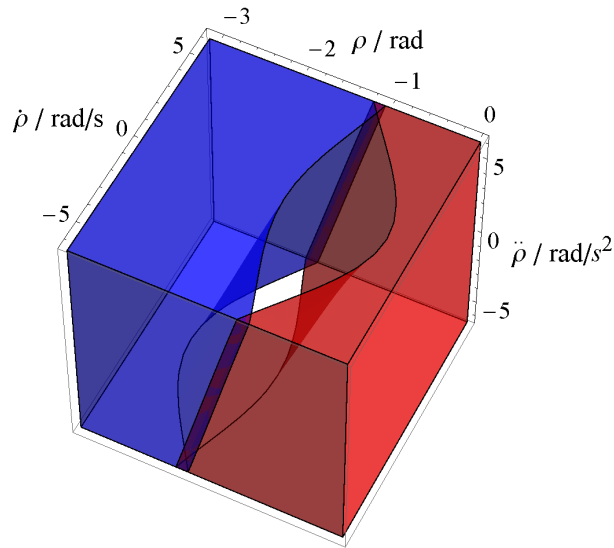


Abb. 5.13: Bereiche der verschwindenden Normalkräfte der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (blau) und der Hinterräder $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (rot).

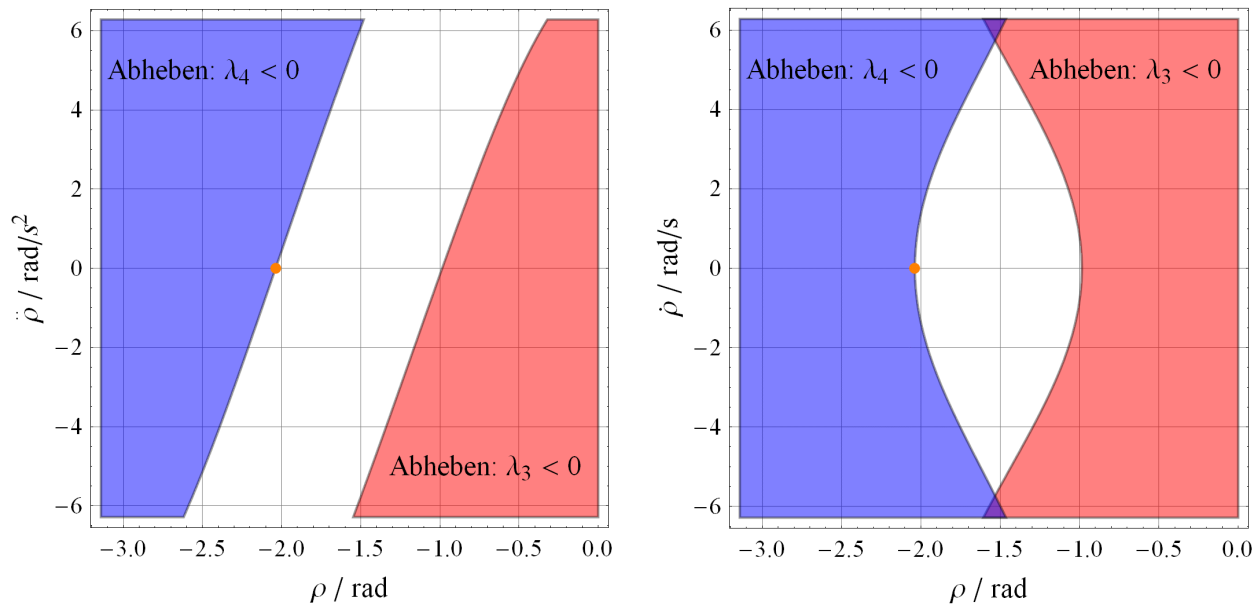


Abb. 5.14: Bereiche der verschwindenden Normalkräfte der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (blau) und der Hinterräder $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (rot). Schnitte bei $\dot{\rho} = 0$ (links) und bei $\ddot{\rho} = 0$ (rechts). Punkt des kritischen Zustands $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ (orange).

Strategie 1. Es sei angenommen, dass die Vorderräder des SCD durch eine Folge quasistationärer Schritte dem Boden genähert werden. Unmittelbar vor dem Kontakt mit dem Boden nimmt der Unterkörper die Neigung von annähernd $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ an, während die Position des Oberkörpers nach der Funktion $\rho_0 = f_{bal}(\phi_0)$ bestimmt ist. Der nächste Schritt zu $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ löst den Kontakt zum Boden aus. Da sich das SCD immer noch in einer inhärent instabilen Ruhelage befindet, muss es nunmehr eventuell auftretende Störungen durch die Regelung in S_1 kompensieren. Störungen

treten auf, da die Vorderräder des SCD Kontakt zum Boden haben und eine Kompensationsbewegung in negative Richtung l dadurch behindert wird. Selbst wenn es zu einem bleibenden Kontakt mit den Vorderrädern kommt und das SCD in der Konfiguration $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ stehen bleibt, ist das Erreichen des Zustands $\mathcal{H}_{3,0}$ noch nicht sichergestellt. Abb. 5.12 zeigt, dass die kleinste Bewegung in die positive Richtung ρ zum Abheben der Vorderräder führt, und somit einen Rückfall in S_1 verursachen kann. Aus diesem Grund wird $\mathcal{H}_{13,0,crit}$, welcher durch diese spezifische Lagekonfiguration gekennzeichnet ist, als der kritische Zustand bezeichnet. Zu bemerken ist, dass die Position l und die Drehung θ hier keine Rolle spielen.

Diese Strategie ist aufgrund der Empfindlichkeit der Eigenschaften des SCD im Punkt des Zustands $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ nicht zielführend. Daher wird eine Strategie verfolgt, diesen Punkt beim Übergang $S_1 \rightarrow S_3$ zu umgehen.

Strategie 2. Beginnend im Zustand $\mathcal{H}_{1,0}$ wäre eine einfache Möglichkeit das Anfahren eines Punktes $\{\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \phi_{res}, \rho_0 = f_{bal}(\phi_0)\}$, wobei der Winkel $\phi_{res} > 0$ einen ausreichend großen Abstand zum Boden gewährleistet. Danach „blockiert“ man die Bewegung des Oberkörpers mit einem konstanten Sollwert ρ_s durch die Regelung⁴⁰ und die triviale Bindung (5.40), ohne lokale Stabilisierung. In diesem Augenblick befindet sich das SCD in einer instabilen Ruhelage (Nullodynamik, Abb. 5.8) und das Fallen des SCD ist unabwendbar. Um die Richtung des Fallens zu bestimmen, kann durch einen kleinen negativen Sollwert l_s die Richtung des Fallens im positiven Sinn des Neigungswinkels ϕ eingestellt werden. Wenn der Boden erreicht ist, hat der Oberkörperwinkel ρ bereits einen ausreichend großen Abstand zum Umkippen. Somit ist der Erhalt des Zustands S_3 gewährleistet.

Der entscheidende Nachteil dieser Strategie liegt in der Tatsache, dass das Erreichen des Bodens mit einer relativ großen Stoßkraft erfolgt. Die Lösung dieses Problems wird in Kapitel 5.7 beschrieben.

5.7 Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$

Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ soll die dynamisch problematische Situation des Grenzwertbereiches der Zustände S_1 und S_3 , bezeichnet mit dem kritischen Punkt $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ (5.65), umgehen und dabei „sanft“ den Kontakt der Vorderräder mit dem Boden herbeiführen. Dies kann mit einer zusätzlichen Aktion des Oberkörpers erreicht werden, welche durch ein entsprechendes Reaktionsmoment die Wirkung hat, die Geschwindigkeit des Unterkörpers $\dot{\phi}$ in der Nähe des Bodens zu vermindern. Um dieses Ziel zu erreichen, werden die Bewegungen des Unterkörpers ϕ und des Oberkörpers ρ beim Absetzen des SCD miteinander verbunden.

Realisiert wird diese Kopplung im Rahmen des Konzeptes der virtuellen Bindungen. Konkret muss die Ausgangsfunktion $\mathbf{h}_{S_1}(\mathbf{v}_{S_1})$ (5.40) für den Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ neu bestimmt werden. Zunächst wird eine relativ allgemeine Form der Ausgangsfunktion angenommen

⁴⁰ Alternativ wäre es bei realem SCD möglich, die Bremse, welche ein Bestandteil der Oberkörperantriebe ist, zu aktivieren.

$$\mathbf{y}_{S_1 \rightarrow 3} = \mathbf{h}_{S_1 \rightarrow 3}(\mathbf{v}_{S_1}) = \begin{bmatrix} y_{S_1,1}(\mathbf{v}_{S_1}) \\ y_{S_1,2}(\mathbf{v}_{S_1}) \\ y_{S_1,3}(\mathbf{v}_{S_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ \rho - f_{1 \rightarrow 3}(\phi) \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Die Funktion $y_{S_1,2}$ verbindet die Winkel ρ und ϕ und die restlichen Funktionen bleiben unabhängig bzw. nur trivial verbunden. Ähnlich zum Fall des Zustands S_1 in Kapitel 5.5, wird eine gültige Koordinatentransformation $\Psi_{S_1 \rightarrow 3}$ gesucht, deren *Jacobi*-Matrix nicht singulär ist. Diese wird nach (5.19) und (5.20) mit Vervollständigung durch $\psi_{S_1 \rightarrow 3,7}(\mathbf{x}_{S_1}) = \phi$ und $\psi_{S_1 \rightarrow 3,8}(\mathbf{x}_{S_1}) = \dot{\phi}$ gefunden

$$\mathbf{z}_{S_1 \rightarrow 3} = \Psi_{S_1 \rightarrow 3}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} l \\ \dot{l} \\ \rho - f_{1 \rightarrow 3}(\phi) \\ \dot{\rho} - f_{1 \rightarrow 3}'(\phi)\dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ - - - - - \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{S_1 \rightarrow 3} \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

Diese Transformation überführt den originalen Zustandsvektor \mathbf{x}_{S_1} in den neuen $\mathbf{z}_{S_1 \rightarrow 3}$. Der relative Grad des Systems $r = 6$ bleibt gegenüber dem Fall im Kapitel 5.5 unverändert. Die Ordnung des Systems ist $n_{\mathbf{v},S_1} = 8$, weshalb nur eine partielle exakte Linearisierung möglich ist.

Das Regelgesetz in der Form (5.24) mit dem Rückkopplungsglied $\mathbf{r}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1})$ und dem Vorsteuerglied $\mathbf{v}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1})$ erhält ebenfalls die gleiche Form. Um die Werte des Regelgesetzes mittels (C.18) bis (C.21) konkret bestimmen zu können, werden die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Ausgangsfunktionen $\partial_p y_{S_1,j}$ und $\partial_{qp} y_{S_1,j}$, $j \in \{1,2,3\}$, $q \in \{l, \rho, \phi, \theta\}$, $p \in \{l, \rho, \phi, \theta\}$ benötigt. Diese sind im Anhang angegeben ((C.48) und (C.49)).

Nach Anwendung der exakten Linearisierung erhält das System die Form (5.46), welche die Gesamtdynamik in eine externe (Koordinaten $\xi_{S_1 \rightarrow 3}$) und eine interne (Koordinate η , angetrieben durch $\xi_{S_1 \rightarrow 3}$ und \mathbf{v}) aufteilt. Das Verhalten der externen Dynamik ist mit einem linearen Regler \mathbf{K}_{lin} , dessen Parameter nach Verfahren (5.38) und (5.39) bestimmt werden, mit der Form

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}_{lin} \xi_{S_1 \rightarrow 3} \quad (5.72)$$

bestimmt. Die erhaltene Struktur des Regelungssystems ist in Abb. 5.15 dargestellt. Zusätzlich zur exakten Linearisierung und dem linearen Regler (5.72) für den Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ ist die Stabilisierungsstruktur eingezeichnet, welche das SCD in S_1 lokal stabilisiert. Mit dem Betätigen des Schalters wird von der lokalen Stabilisierung in S_1 auf die Funktion des Absetzens beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ umgeschaltet.

In dem linearen Regelgesetz (5.72) ist der Sollwert $\xi_s = \mathbf{0}$, da die Bewegung des SCD durch die virtuelle Bindung bestimmt ist. Der nächste Schritt ist daher die Bestimmung der virtuellen Bindung durch die entsprechende Bindungsfunktion.

$$\left. \frac{d\rho}{d\phi} \right|_{\phi=\frac{\pi}{2}} > 0 \quad (5.74)$$

gelten.

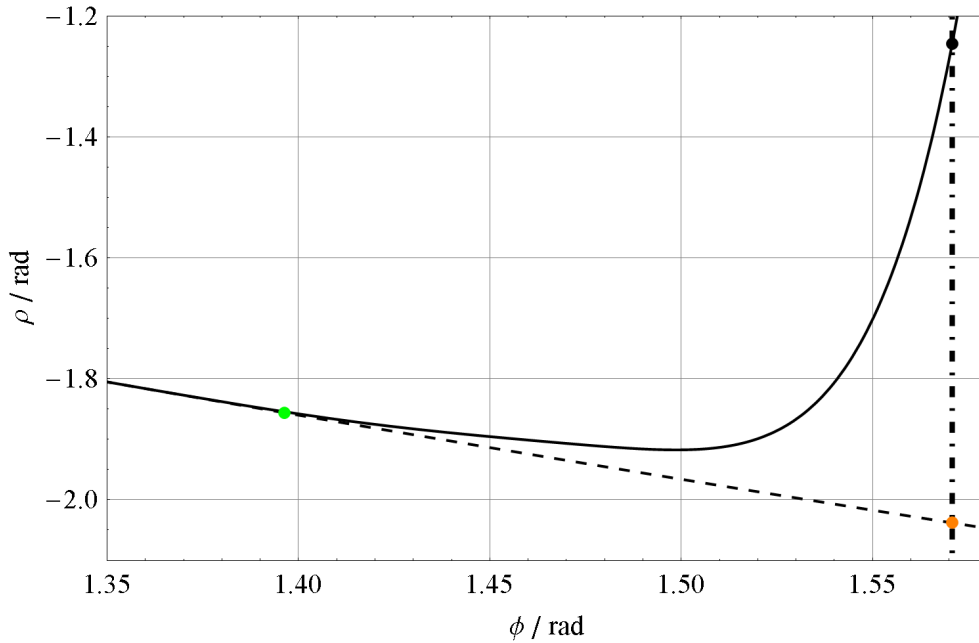


Abb. 5.16: Bindungsfunktion $y_{S1,2}(\mathbf{v}_{S1}) = \rho - f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ (voll), Ruhelagekennlinie (gestrichelt) und Bodenlinie (Punkt-Strich). Anfangspunkt (grün), kritischer Punkt (orange) und Endpunkt (schwarz).

Nach diesen qualitativen Überlegungen folgt die konkrete Bestimmung der Bindungsfunktion $y_{S1,2}(\mathbf{v}_{S1})$ (5.73). Wenn sich der Verlauf der internen Dynamik dem Verlauf der Nulldynamik asymptotisch nähert, was mit dem Regler (5.72) gewährleistet ist, dann wird die Ausgangsfunktion zu Null $y_{S1,2}(\mathbf{v}_{S1}) = 0$ bzw. der Unterkörperwinkel ϕ und der Oberkörperwinkel ρ sind mit der Funktion

$$\rho = f_{1 \rightarrow 3}(\phi) \quad (5.75)$$

gekoppelt.

Die konkrete Bestimmung der Funktion $\rho = f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ wird mit einer numerischen Optimierung durchgeführt, wobei in das verwendete Gütefunktional folgende Kriterien einbezogen werden:

- Die Unterkörpergeschwindigkeit beim Kontakt mit dem Boden $\dot{\phi}_{TD} = \dot{\phi}(t_{TD})$ soll möglichst klein sein (im Idealfall Null). Der Zeitpunkt des Kontakts der Vorderräder mit dem Boden ist dabei mit t_{TD} bezeichnet,
- die kinetischen Energien des Unter- und Oberkörpers während des Absetzens sollen klein sein, was sich positiv auf die max. Amplituden der Stellgrößen beim Absetzen auswirkt.

Das Gütefunktional zur Optimierung des Absetzens folgt aus diesen Überlegungen

$$J_{S_1 \rightarrow S_3} = w_{\dot{\phi}_{TD}} |\dot{\phi}_{TD}| + w_{E_{\dot{\phi}}} \int_0^{t_{TD}} \dot{\phi}^2(t) dt + w_{E_{\dot{\rho}}} \int_0^{t_{TD}} \dot{\rho}^2(t) dt. \quad (5.76)$$

Die Skalare $w_{\dot{\phi}_{TD}}$, $w_{E_{\dot{\phi}}}$ und $w_{E_{\dot{\rho}}}$ stellen die entsprechenden Wichtungsfaktoren dar.

Um die Funktion $f_{1 \rightarrow 3}$ zu realisieren, wurde ein Polynom gewählt, um bei der Implementierung des Regelgesetzes für eine Änderung der Ausgangsfunktion nur die Werte der Koeffizienten ändern zu müssen. Weiterhin wird, aufgrund guter Erfahrungen bei der Implementierung der Ausgangsfunktion bei zweibeinigen Robotern [5], ein *Bézier*-Polynom (Definition und Eigenschaften sind im Anhang, Kapitel C.6.1, dargestellt) verwendet. Die Funktion $f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ wird hier mit einem *Bézier*-Polynom siebter Ordnung realisiert

$$f_{1 \rightarrow 3}(\phi) = \sum_{k=0}^7 c_k \phi^k. \quad (5.77)$$

Eine relativ hohe Ordnung (sieben) des *Bézier*-Polynoms wurde gewählt, um eine ausreichend hohe Flexibilität der Funktion $f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ erreichen zu können. Der Definitionsbereich für den Winkel ϕ beträgt $[77, 90]^\circ$. Der in den Entwurf einbezogene Bereich (Entwurfsbereich) beträgt $[80, 90]^\circ$. Es werden somit acht Punktepaare $\{s_j, \rho_j\}$ benötigt, um das Polynom (5.77) zu bestimmen. Bei der numerischen Optimierung stellte sich heraus, dass es ausreichend ist, nur die letzten vier Punktepaare $\{s_j, \rho_j\}$ variabel zu wählen, während die ersten vier Punktepaare durch die Ruhelagefunktion $\rho = f_{bal}(\phi)$ (4.81) bestimmt wurden. Nach einigen Iterationen, bei denen die Gewichtswerte des Gütefunktional (5.77) variiert wurden, erhält man schließlich mit den Werten $w_{\dot{\phi}_{TD}} = 0.001 \times \frac{\pi}{180}$, $w_{E_{\dot{\phi}}} = 1$, $w_{E_{\dot{\rho}}} = 0.01$ den in Abb. 5.16 dargestellten Verlauf. Die Werte des dazugehörigen *Bézier*-Polynoms sind im Anhang (Kapitel C.6.1) dargestellt.

Einige Aspekte des SCD-Verhaltens beim Absetzen sind erst nach der Analyse der Nulldynamik (Kapitel 5.7.2) ersichtlich. Deshalb stellt die Bestimmung der Bindungsfunktion einen iterativen Prozess dar, der die Rückwirkung der Nulldynamik auf die Bestimmung der Bindungsfunktion berücksichtigt.

5.7.2 Nulldynamik

Die Nulldynamik beim Absetzen des SCD wird analog zu Kapitel 5.5.1 hergeleitet. Gegenüber dem Fall im Kapitel 5.5.1, ist hier als Startpunkt nur der bei der Auslegung berücksichtigte Anfangspunkt $\mathcal{H}_{1,0}$ zu betrachten. Dieser Punkt beinhaltet annähernd die Ruhelage $\rho_0 = f_{bal}(\phi_0) \approx f_{1 \rightarrow 3}(\phi_0)$, was mit der Koordinatentransformation (5.71) zur Betrachtung des Falles $\xi_{S_{1 \rightarrow 3},0} = 0$ führt.

Analog zu (5.48) erhält man die Eingangsgrößen $\mathbf{i}_{v,Z,S_{1 \rightarrow 3}}$ des Systems der Nulldynamik aus der Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{b,S_1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{R}_{A,S_1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{i}_{v,Z,S_1 \rightarrow 3}. \quad (5.78)$$

Aus (5.78) folgt die Stellgröße $\mathbf{i}_{v,Z,S_1 \rightarrow 3}$ für die Nulldynamik, die im Anhang mit (C.53) angegeben ist. Mit dem Einsetzen von $\mathbf{i}_{v,Z,S_1 \rightarrow 3}$ in die Gleichung der Nulldynamik folgt schließlich die Nulldynamik des SCD im Zustand S_1 für die Ausgangsfunktion (5.70) beim Absetzen

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{\eta,1}(\boldsymbol{\eta}) \\ f_{\eta,2}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ -\frac{RC_{v,S_1,1} + C_{v,S_1,2} + \dot{\phi}^2 f_{1 \rightarrow 3}''(\phi)(RH_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,23})}{RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22} + f_{1 \rightarrow 3}'(\phi)(RH_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,23})} \end{bmatrix}. \quad (5.79)$$

Zu beachten ist, dass in (C.53) und (5.79) die einzelnen Variablen der Elemente des nichtlinearen Modells $H_{v,S_1,jk} = H_{v,S_1,jk}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$ und $C_{v,S_1,j} = C_{v,S_1,j}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$, für $\{j, k\} \in \{1, 2, 3, 4\}$, im Gegensatz zu Kapitel 5.5.1, nun Funktionen von ϕ , $f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ und $f_{1 \rightarrow 3}'(\phi)$ sind. Der Wert von $C_{v,S_1,4}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) = 0$, was erwartungsgemäß zu $i_{yaw,Z,S_1 \rightarrow 3} = 0$ führt. Die Ableitungen der Bindungsfunktion $f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ treten auch explizit in der Nulldynamik (5.79) auf, womit der Einfluss der Bindungsfunktion auf die Nulldynamik deutlich ist.

Die Analyse der Ruhelagen zeigt erwartungsgemäß keine Ruhelagen im Arbeitsbereich $\phi = [80, 90]^\circ \approx [1.396, 1.571]$ rad. Die nächstliegenden Ruhelagen befinden sich unterhalb des Entwurfsbereichs bei $[\phi_0, \dot{\phi}_0]^T = [1.3439 \text{ rad}, 0 \text{ rad/s}]^T$ und oberhalb bei $[\phi_0, \dot{\phi}_0]^T = [1.61313 \text{ rad}, 0 \text{ rad/s}]^T$. Die Ruhelage $[1.61313 \text{ rad}, 0 \text{ rad/s}]^T$ liegt außerhalb des diskreten Zustandes S_1 (unter der Bodenebene) und das Gesamtverhalten des SCD muss nach Verlassen von S_1 hybrid betrachtet werden. Die Ruhelage $[1.3439 \text{ rad}, 0 \text{ rad/s}]^T$, welche sich in S_1 befindet, kann mit dessen Attraktivität⁴² unter Berücksichtigung der Ungenauigkeiten im Realsystem das Verhalten des SCD im Anfangspunkt $[\phi_0, \dot{\phi}_0]^T = [80^\circ, 0^\circ/\text{s}]^T$ beeinflussen.

Das Phasenporträt der Nulldynamik (5.79) ist in Abb. 5.17 dargestellt. Der Anfangspunkt, für den die Bindungsfunktion $f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ entworfen worden ist,

$$\boldsymbol{\eta}_0^* = [\phi_0^*, \dot{\phi}_0^*]^T = [80^\circ, 0^\circ/\text{s}]^T, \quad (5.80)$$

ist grün dargestellt. Die restlichen Anfangspunkte sind schwarz markiert. Aus dem Phasenporträt (Abb. 5.17) sowie den zeitlichen Verläufen der Nulldynamik (Anhang, Abb. C.8) ist das qualitative Verhalten des SCD ersichtlich. Für den betrachteten Anfangspunkt $\boldsymbol{\eta}_0^*$, sowie die Anfangspunkte deren näherer Umgebung, entwickelt sich die Nulldynamik mit einem steigenden Winkel ϕ . Die Bewegung des Oberkörpers ist währenddessen durch die Bindungsfunktion $f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ (5.73), Abb. 5.16, gekoppelt und verläuft anfangs noch nahe der Ruhelagekennlinie. Sobald der Winkel sich dem Boden nähert $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, steigt durch die Bindungsfunktion $f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ die Beschleunigung des Oberkörpers, was ein Reaktionsmoment am Unterkörper und schließlich das Abbremsen des Un-

⁴² Begriffsdefinition in [47].

terkörpers bewirkt. Beim Erreichen des Bodens wird die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ klein und somit ist ein sanftes Absetzen möglich.

Das Verhalten der Nulldynamik unterscheidet sich davon in zwei in Abb. 5.17 dargestellten Anfangspunkten, wenn $\phi_0 = 78.5^\circ$ ist. In diesen Fällen bildet sich ein Grenzzzyklus mit zunächst kleiner werdendem Winkel ϕ , was einem Aufheben des SCD entspricht. Diese Anfangspunkte weichen vom entworfenen Anfangspunkt η_0^* ab und befinden sich außerhalb des Arbeitsbereiches beim Absetzen, sind aber aufgrund ihrer Nähe unter Berücksichtigung eventueller, im Realsystem auftretender Ungenauigkeiten, trotzdem interessant.

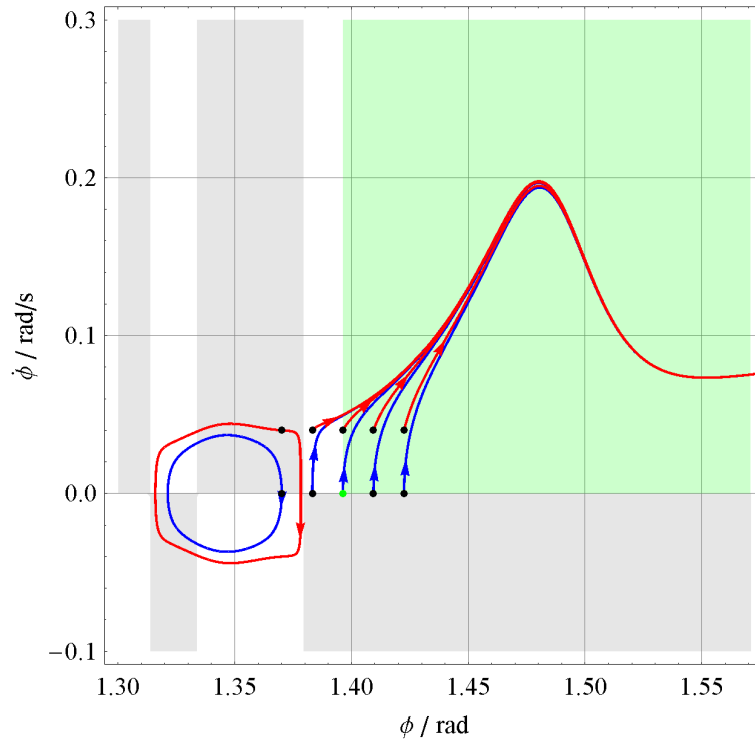


Abb. 5.17: Phasenporträt der Nulldynamik beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ im Fall der Ausgangsfunktion (5.40) für die Anfangswerte $\phi_0 = \{78.5, 79.25, 80, 80.75, 81.5\}^\circ$ und $\dot{\phi}_0 = \{0, 0.04\}^\circ/\text{s}$. Der Startpunkt η_0^* , für die Auslegung ist grün markiert. Anhand (5.79) bestimmter Bereiche mit Bedingung $\frac{\partial f_{\eta,1}}{\partial \phi} + \frac{\partial f_{\eta,2}}{\partial \dot{\phi}} \geq 0$ (grauer Hintergrund) und Bedingung $\frac{\partial f_{\eta,1}}{\partial \phi} + \frac{\partial f_{\eta,2}}{\partial \dot{\phi}} < 0$ (Rest der Phasenebene). Arbeitsbereich $\phi = [80, 90]^\circ$ und $\dot{\phi} \geq 0$ (grüner Hintergrund).

Dies macht die Empfindlichkeit des SCD gegenüber dem Anfangspunkt η_0^* deutlich. Der Arbeitsbereich des SCD während des Absetzens ist in Abb. 5.17 grün hinterlegt. Nach dem *Poincaré-Bendixson* Theorem [44] kann sich die Trajektorie eines Systems zweiter Ordnung, falls sie in diesem begrenztem Raum bleibt, entweder auf eine Ruhelage hin zu bewegen, zu einem stabilen Grenzzzyklus bewegen oder die Trajektorie selbst ist ein Grenzzzyklus. Um nicht alle Anfangspunkte des Arbeitsbereiches testen zu müssen, kann man sich eines (anderen) *Bendixson* Theorems [44] bedienen, welches die Nichtexistenz der Grenzzyklen eines Systems zweiter Ordnung anhand der Systemfunktionen $f_{\eta,1}(\eta)$ und $f_{\eta,2}(\eta)$ der Nulldynamik (5.79) bestätigt. Die Bedingung dafür, dass kein Grenzzzyklus in einem betrachteten Bereich existiert, ist, dass der Wert $\frac{\partial f_{\eta,1}}{\partial \phi} + \frac{\partial f_{\eta,2}}{\partial \dot{\phi}}$ in diesem Bereich nicht Null wird und keine Vorzeichenänderung auftritt (die Bedingungen des betrachteten Wertes sind in Abb. 5.17 gekennzeichnet). Aus diesen Bedingungen folgt schließlich, dass sich das

System außerhalb des betrachteten Arbeitsbereiches in Richtung $\phi = \frac{\pi}{2}$ mit kleiner Geschwindigkeit $\dot{\phi} > 0$ bewegt, ohne irgendwo stehen zu bleiben oder in einem Grenzyklus zu verharren.

Da das SCD während des Zustandsübergangs $S_1 \rightarrow S_3$ keine Ruhelage enthält, wird dessen Verhalten anhand einer Analyse der Verläufe charakterisiert. Als Nominaltrajektorie $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ wird dabei die Phasentrajektorie für den Anfangspunkt $\boldsymbol{\eta}_0^*$ bezeichnet. Jede andere Phasentrajektorie $\boldsymbol{\eta}(t)$, die als Ursache eines geänderten Anfangspunktes $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}_0^* + \delta\boldsymbol{\eta}_0$ entsteht, wird mit der Nominaltrajektorie verglichen. Aus der Differenztrajektorie $\mathbf{e}_\eta(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\eta}^*(t)$ entsteht mit Berücksichtigung der jeweiligen Nulldynamik (5.79) folgende Differenzialgleichung [44], [46]

$$\dot{\mathbf{e}}_\eta = \mathbf{f}_\eta(\boldsymbol{\eta}^* + \mathbf{e}_\eta, t) - \mathbf{f}_\eta(\boldsymbol{\eta}^*, t) = \tilde{\mathbf{f}}_\eta(\mathbf{e}_\eta, t), \quad (5.81)$$

wobei die Funktion $\tilde{\mathbf{f}}_\eta(\mathbf{e}_\eta, t)$ zeitvariant ist, im Gegensatz zur zeitinvarianten Funktion $\mathbf{f}_\eta(\boldsymbol{\eta})$ aus (5.79). Mit der erhaltenen Differentialgleichung (5.81) kann das Bewegungsstabilitätsproblem in ein entsprechendes Stabilitätsproblem der Ruhelage umgewandelt werden. Die Differenztrajektorien $\mathbf{e}_\eta(t)$ sind entsprechend den Anfangspunkten aus Abb. 5.17 mit einem Phasenporträt im Anhang (Abb. C.9) dargestellt. Aus der Tendenz unterschiedlicher Anfangspunkte im Phasenporträt ist ersichtlich, dass die Amplitude der Differenztrajektorie $\mathbf{e}_\eta(t)$ beliebig klein gehalten werden kann, wenn der Anfangspunkt $\mathbf{e}_\eta(0)$ ausreichend nahe dem nominalen Anfangspunkt $\mathbf{e}_\eta^*(0) = \mathbf{0}$ steht. Dies gilt nicht für zwei dargestellte äußere Anfangspunkte. Daraus kann man schließen, dass der Verlauf der Nominaltrajektorie $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ praktisch lokal stabil im Sinne von *Ljapunov* verläuft.

Physikalisch ist dieses Verhalten verständlich, da das SCD in diesem Anfangspunkt einem einfachen inversen Pendel ähnelt. Der Unterschied zu einem einfachen inversen Pendel mit der trivialen Bindungsfunktion (5.39) in Kapitel 5.5 ist jedoch die Möglichkeit einer Bewegung des Oberkörpers entlang der geometrischen Bindungsfunktion, dargestellt in Abb. 5.16.

Um die Anfangsbewegung in die gewünschte Richtung robuster bestimmen zu können, d.h. ein Fallen des SCD zum Boden auszulösen, wird zu Beginn des Übergangs eine zusätzliche Bewegung eingeleitet. Dies geschieht durch Änderung der longitudinalen Sollposition l_s des SCD in negative Richtung. Die Amplitudenänderung soll dabei groß genug sein, um möglichst alle Unsicherheiten des realen SCD zu überwinden, jedoch möglichst klein, um unerwünschte Longitudinalbewegungen des SCD klein zu halten. Auf der Basis von Experimenten wurde ein Wert von -1 cm eingestellt, welcher das SCD mit hoher Zuverlässigkeit in den gewünschten Fall bringt.

Bei der Analyse der Nulldynamik kann die zusätzlich eingeleitete Bewegung nicht unmittelbar simuliert werden, weil die Nulldynamik als eine reduzierte Dynamik des SCD nur die Änderungen des Unterkörperwinkels ϕ und dessen Geschwindigkeit $\dot{\phi}$ beinhaltet. Näherungsweise kann eine positive Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\phi}_0$ die Anfangsbewegung abbilden. Aus diesem Grund sind in Abb. 5.17 neben der Anfangsgeschwindigkeit Null auch positive Anfangsgeschwindigkeiten betrachtet worden.

Das Verhalten der Dynamik des SCD unter Berücksichtigung der zusätzlich eingeleiteten Bewegung wird durch Simulation der Gesamtdynamik analysiert. Wie es sich durch Simulationsverläufe und Messungen des Realsystems zeigen wird, bestimmt die zusätzlich eingeleitete Bewegung die

Anfangsbewegung in die gewünschte Richtung in einem breiteren Bereich, als es die Nulldynamik in Abb. 5.17 andeutet.

Als Konsequenz einer sanften Kontaktaufnahme des Unterkörpers ($\dot{\phi}_{TD} \approx 0$) mit dem Boden $\phi = \frac{\pi}{2}$ hat der Oberkörper zum Zeitpunkt des Kontaktes t_{TD} durch die Beschleunigung eine signifikante Geschwindigkeit $\dot{\rho}_{TD} > 0$. Die Bewegung des SCD in S_1 endet also mit einer Geschwindigkeit $\dot{\rho}_{TD} > 0$, welche in dem nächstauftretenden Zustand S_3 abgebaut werden muss, da der Endzustand $\mathcal{H}_{3,0}$ die Endruhelage darstellen soll.

Aus zwei Gründen wird die Unterkörpergeschwindigkeit $\dot{\phi}_{TD}$ nicht auf Null gesetzt. Zum einen verursacht eine kleinere Unterkörpergeschwindigkeit $\dot{\phi}_{TD}$ ein größeres Reaktionsmoment des Oberkörperantriebs und somit eine größere Oberkörpergeschwindigkeit $\dot{\rho}_{TD} > 0$, die im Zustand S_3 abgebaut werden muss. Zum anderen besteht aufgrund von stets vorhandenen Modellungenauigkeiten die Möglichkeit, dass der Kontakt zum Boden nicht zustande kommt. Aus diesen Gründen ist es notwendig, dass eine kleine, positive Geschwindigkeit $\dot{\phi}_{TD} \approx 0$, $\dot{\phi}_{TD} > 0$, eingestellt wird, um die Aufgabe des Absetzens zu erleichtern und eine höhere Robustheit zu gewährleisten.

Die Behandlung des Zustandsübergangs $S_1 \rightarrow S_3$ basiert auf einem plastischen Stoß. Eine ausführliche Untersuchung des Verhaltens mit einem teilelastischen Stoß wurde nicht durchgeführt, da der beschriebene Übergang relativ robust ist. Zum einen trägt dazu ein ausreichend hoher Abstand des Oberkörperwinkels ρ_{TD} zum Punkt des kritischen Zustands $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ bei. Zum anderen sind in Folge kleinerer Eintrittsgeschwindigkeiten $\dot{\phi}_{TD} \approx 0$ die Abprallgeschwindigkeiten entsprechend klein.

5.7.3 Abbremsung

Nachdem der Kontakt der Vorderräder mit dem Boden erreicht ist, muss das Abbauen der Oberkörperbewegung $\dot{\rho}_{TD} > 0$ durch Abbremsen erfolgen. Das SCD befindet sich beim Abbremsen im Zustand S_3 , wo eine vollständige exakte Linearisierung aufgrund des vollen relativen Grades möglich ist.

Entscheidend ist hier, dass die Bewegung mit einer Oberkörpergeschwindigkeit $\dot{\rho}_{TD} > 0$ beginnt und in der Ruhelage $\mathcal{H}_{3,0}$ endet. Eine Reglerstruktur, welche diese Bewegung ermöglicht, wurde bereits im Kapitel 5.4 beschrieben.

Beim Abbremsen ist, wie im Kapitel 5.6 beschrieben, zu beachten, dass die Hinterräder bei zu hohen negativen Beschleunigungen nicht abheben. In Abb. 5.13 bzw. Abb. 5.14 ist der Bereich dargestellt, in dem die Bedingung der verschwindenden Normalkräfte $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ das Abheben auslöst. Es zeigt sich, dass dieser Bereich mit kleiner werdender Beschleunigung $\ddot{\rho}$ größer wird.

Aus diesem Grund folgt das Abbremsen einem kubischen Polynom nach Beschreibung in Kapitel 2.5, mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\rho}$, wie in Abb. 5.18 dargestellt.

Diese Anfangsgeschwindigkeit wird zu Beginn des Zustands S_3 vom vorigen Zustand S_1 übernommen und fällt nach einer Parabel auf Null. Somit sind relativ sanfte Übergänge von der Bewegung in S_1 hin zur Bewegung in S_3 möglich.

Der zeitliche Verlauf der Trajektorie in Abb. 5.18 kann als eine parametrische Kurve gegenüber dem Bereich der verschwindenden Normalkraft $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ dargestellt werden, Abb. 5.19. Ein Umkippen nach vorne, $S_3 \rightarrow S_2$, wird verhindert, weil sich die Trajektorie des Oberkörpers beim Eintritt in S_3 weit von der Grenze des Bereiches $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (Abheben mit Hinterrädern, Abb. 5.19 bzw. Abb. 5.20) befindet.

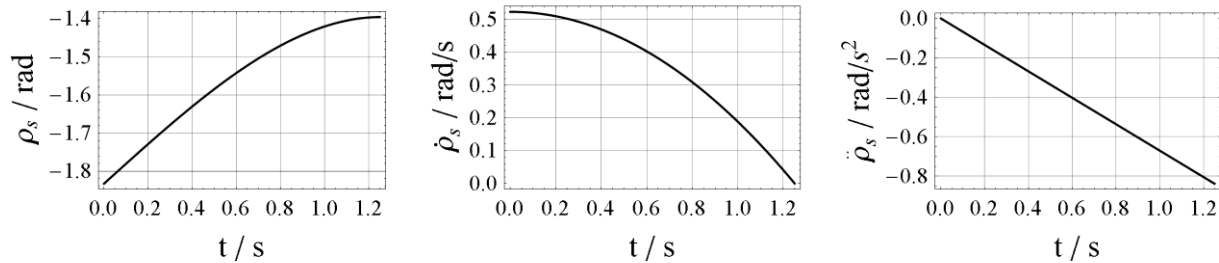


Abb. 5.18: Solltrajektorie für das Auslösen des Zustandsübergangs $S_3 \rightarrow S_1$ für die Werte: $\rho_{s,A} = -105 \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, $\rho_{s,E} = -80 \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, $\dot{\rho}_{s,A} = 30 \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\dot{\rho}_{s,E} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Ein wichtiger Aspekt beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ ist die Stabilität des Übergangs in der hybriden Betrachtung, wie in Kapitel 5.6 beschrieben. Bei dem hier gezeigten Übergang $S_1 \rightarrow S_3$ ist die Möglichkeit eines Rückfalls in den Zustand S_1 deutlich vermindert, da sich das SCD beim Eintritt in S_3 weit von der Grenze des Bereiches $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (Abheben mit Vorderrädern, Abb. 5.20) befindet.

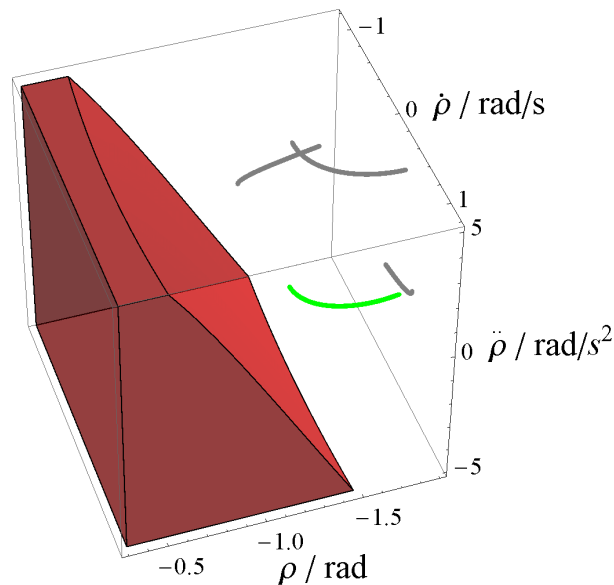


Abb. 5.19: Bereich der verschwindenden Normalkraft der Hinterräder $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (rot), Solltrajektorie beim Abbremsen im Zustand S_3 (nach dem Übergang $S_1 \rightarrow S_3$) (grün). Weitere Linien stellen Projektionen der Solltrajektorie beim Abbremsen auf die Seitenflächen des kubischen Definitionsbereiches dar (grau).

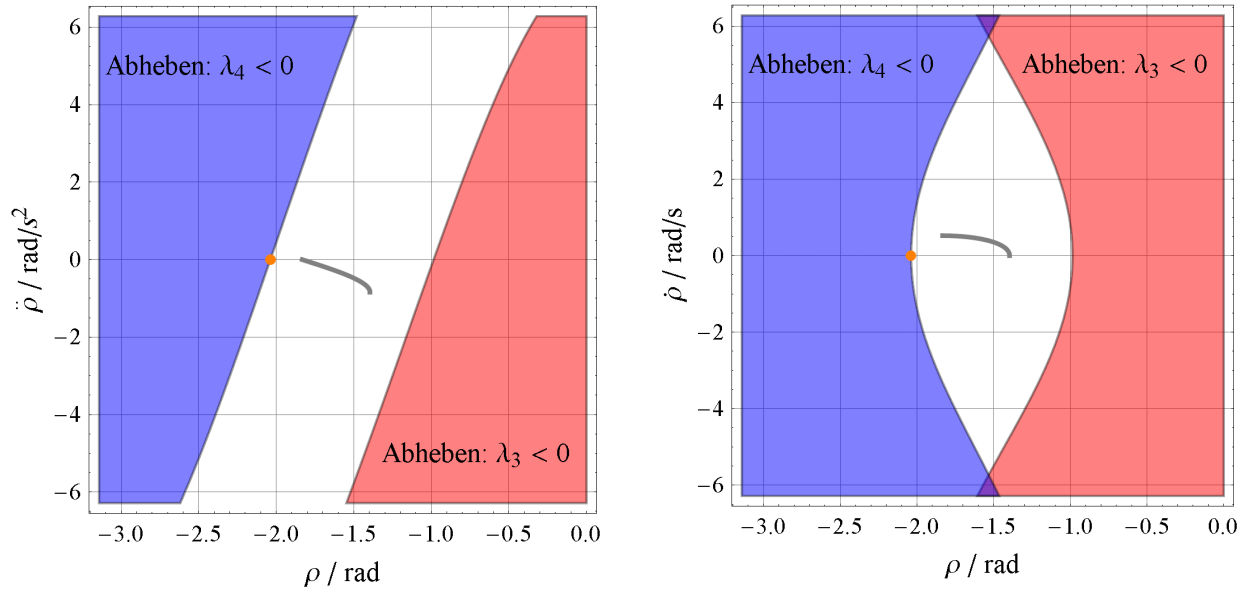


Abb. 5.20: Bereiche der verschwindenden Normalkraft der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (blau) und der Hinterräder $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (rot). Schnitt bei $\dot{\rho} = 0$ (links) und Schnitt bei $\ddot{\rho} = 0$ (rechts). Der Punkt des kritischen Zustands $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ (orange). Weitere Linien stellen Projektionen der Solltrajektorie beim Abbremsen auf die Seitenflächen des kubischen Definitionsbereiches dar (grau).

5.8 Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$

Der Ausgangspunkt $\mathcal{H}_{3,0}$ im Zustand S_3 ist das geregelte SCD, wie in Kapitel 5.4 beschrieben. Um den Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ auszulösen, muss die Normalkraft der Vorderräder zum Boden verschwinden $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (Abb. 5.11 bzw. Abb. 5.12). Dabei ist das vollständige Eindringen in diesen Bereich wichtig, ein Stopp am Rand ($\mathcal{H}_{13,0,crit}$) wäre, wie in Kapitel 5.6 beschrieben, unerwünscht. Nach dem Eintreten in diesen Bereich folgt der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ und es kann eine Regelung im Zustand S_1 aktiviert werden, um das SCD zu stabilisieren. Zum Eindringen in den Bereich $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung.

Eine einfache Möglichkeit besteht in einer quasistationären Oberkörperbewegung ($\dot{\rho} \approx 0 \wedge \dot{\rho} < 0$, $\ddot{\rho} \approx 0$) und Durchqueren des kritischen Punktes $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ (Abb. 5.11 bzw. Abb. 5.12). Das SCD beginnt zu kippen ($\dot{\phi} < 0$) und der Übergang $S_3 \rightarrow S_1$ erfolgt. Ein Nachteil dieser Bewegung ist, dass eine relativ lange Zeit bis zum Übergang benötigt wird. Zudem resultiert der Übergang in relativ großen absoluten Oberkörperwinkelamplituden $|\rho|$. Außerdem kann dieser Winkel in einer Ruhelage im Zustand S_1 nicht aufrecht erhalten werden, weil dies nach der Ruhelagekennlinie in Abb. 4.5 einen Unterkörperwinkel $\phi > \frac{\pi}{2}$ verursachen würde und ein Rückfall in den Zustand S_3 folgen würde. Es muss daher, nach dem Eintreten in den Zustand S_1 und Umschalten eines geeigneten Reglers, eine Aktion zur Verminderung des absoluten Oberkörperwinkels $|\rho|$ erfolgen.

Eine dynamischere Bewegung ermöglicht schnelleres Eindringen in den Bereich $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ sowie kleinere Oberkörperwinkelamplituden beim Übergang. Entsprechend der Solltrajektorien (2.89) und (2.92) wird eine Solltrajektorie $\rho_s(t)$ realisiert, welche den Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ auslöst (Abb. 5.21).

Der zeitliche Verlauf der Trajektorie kann als eine parametrische Kurve gegenüber dem Bereich der verschwindenden Normalkraft $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ dargestellt werden (Abb. 5.22 und Abb. 5.23). Hier ist ersichtlich, dass die Solltrajektorie in den Bereich $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ eindringt. Eine weitere Darstellung in Schnittebenen $\dot{\rho} = 0$ und $\ddot{\rho} = 0$ (Abb. 5.23) zeigt, dass das Eindringen hauptsächlich durch die Beschleunigung beim Abbremsen zustande kommt. Der kritische Punkt $\mathcal{H}_{13,0,crit}$ wird dabei umgangen und der Endwert des Oberkörperwinkels muss nicht im Bereich $\rho > \rho_0 = f_{bal}(\frac{\pi}{2})$ liegen.

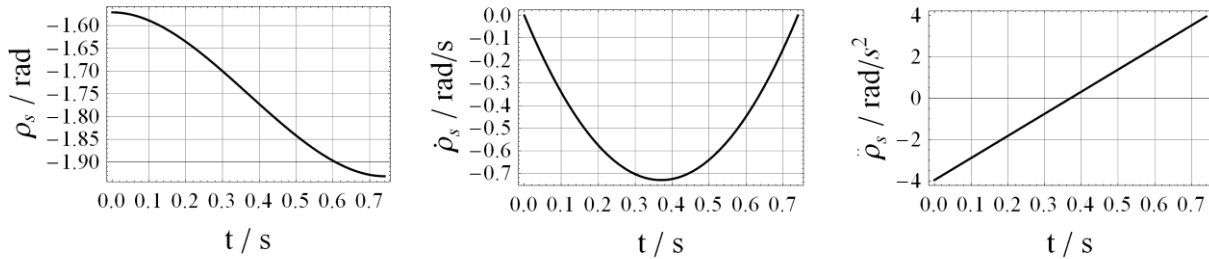


Abb. 5.21: Solltrajektorie für das Auslösen des Zustandsübergangs $S_3 \rightarrow S_1$. Werte: $\rho_{s,A} = -\frac{\pi}{2}$ rad, $\rho_{s,E} = -1.931$ rad, $\dot{\rho}_{s,A} = \dot{\rho}_{s,E} = 0$ rad/s, $t_E = 0.74$ s.

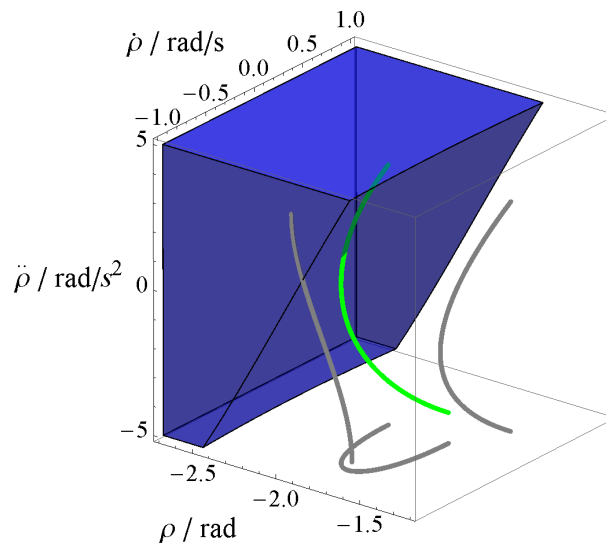


Abb. 5.22: Bereich mit der verschwindenden Normalkraft der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (blau). Solltrajektorie zum Auslösen des Übergangs $S_3 \rightarrow S_1$ dargestellt (grün). Weitere Linien stellen Projektionen der Solltrajektorie beim Abheben auf die Seitenflächen des kubischen Definitionsreiches dar (grau).

Darüber hinaus ist in Abb. 5.23 ersichtlich, dass der Bereich des Abhebens der Hinterräder $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ durch die Solltrajektorie nicht berührt wird, was die Gefahr einer ungewollten Aktion beseitigt. Gleichzeitig stellt es den Grenzbereich dar, in welchem die Bewegung stattfinden soll, um ein Abheben der Hinterräder zu verhindern.

Obwohl das Führungsverhalten in Simulationen ideal verläuft (Kapitel 5.4), sind am realen System Abweichungen aufgrund von Modellungenauigkeiten und anderen realen Störeinflüssen zu erwarten.

Nach dem Eintritt in den Zustand S_1 soll das SCD in einer Ruhelage stabilisiert werden. Um dies zu erreichen, wird von der Regelung des Zustands S_3 zur Regelung des Zustands S_1 mittels *Gain-Scheduling*, wie in Kapitel 5.5.2 beschrieben, umgeschaltet. Um beim Aktivieren der Stabilisierung große Amplituden der Position l zu vermeiden, die zur Kompensation des Drehimpulses benötigt werden, wurden in Simulationen Umschaltvorgänge mit Solltrajektorie nach Abb. 5.21 und unterschiedlichen Umschaltpunkten des Unterkörperwinkels ϕ untersucht. Für die Solltrajektorie Abb. 5.21 wurde so festgestellt, dass sich der günstigste Umschaltpunkt für ϕ im Intervall $\left[80 \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{2}\right]$ rad befindet.

Ein realer Verlauf des Zustandsübergangs $S_3 \rightarrow S_1$ mit entsprechender Simulation wird später angegeben (Kapitel 6.1.4).

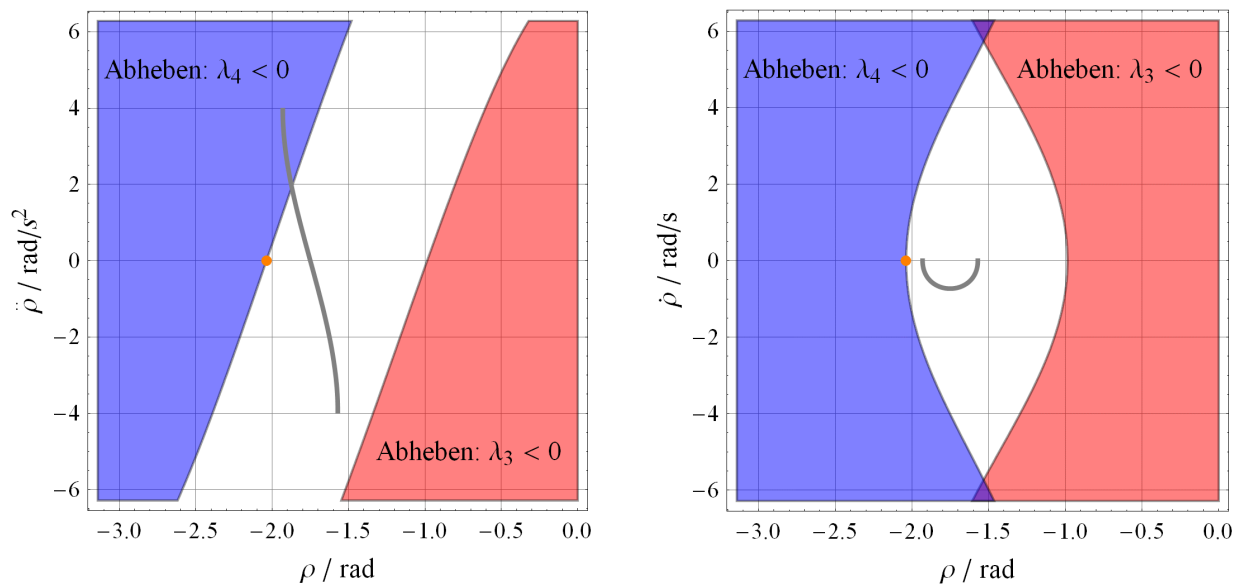


Abb. 5.23: Bereich mit der verschwindenden Normalkraft der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (blau) und der verschwindenden Normalkraft der Hinterräder $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (rot). Schnitt bei $\dot{\rho} = 0$ (links) und Schnitt bei $\ddot{\rho} = 0$ (rechts). Weitere Linien stellen Projektionen der Solltrajektorie beim Abheben auf die Seitenflächen des kubischen Definitionsbereiches dar (grau).

5.9 Gesamtsystem

Abb. 5.24 zeigt die aus regelungstechnischer Sicht wichtigsten Elemente des Gesamtsystems des SCD. Dabei sind die Elemente aus den Teilsystemen bzw. Situationen in Abb. 5.6 (Regelung in S_3) und Abb. 5.15 (Regelung in S_1 mit der Möglichkeit zum Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$) zusammengesetzt.

Ein Schalter S_i wird zwischen den Modellen der unterschiedlichen Zustände gewechselt.

Am realen SCD ist der aktuelle Zustand S_i nicht direkt feststellbar, sondern muss anhand von Sensordaten ermittelt werden, was den Störungen und Ungenauigkeiten in der Realität unterliegt. Der ermittelte diskrete Zustand entspricht daher nicht immer dem tatsächlichen Zustand des SCD S_i . Um eine gewisse Robustheit gegenüber Ungenauigkeiten der Ermittlung des Zustands am realen SCD zu gewährleisten, wird der diskrete Zustand anhand des ermittelten Unterkörperwinkels

Ein konservatives, vorzeitiges Umschalten zum Zustand $S_{c,3}$ kann durch einen niedrigeren Schwellwert $\phi < \frac{\pi}{2}$ eingestellt werden. Dieses führt zum Strecke-Regler Paar $\{S_1, S_{c,3}\}$ (Abb. 5.25). In diesem Zustandspaar folgt zwar eine Beschleunigung des Unterkörperwinkels ϕ (das „Fallen“ beschleunigt sich), was entgegen der Anforderung einer sanften Kontaktaufnahme wirkt, aber schließlich einen Übergang zum Zustandspaar $\{S_3, S_{c,3}\}$ sichert (Abb. 5.25). Dies erfüllt die grundlegende Funktionalität im betrachteten Segment und wird daher als Strategie zum Umschalten gewählt.

Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Die Analyse des Zustandsübergangs $S_3 \rightarrow S_1$ beginnt mit dem idealen Zustandspaar Strecke-Regler $\{S_3, S_{c,3}\}$. Während der vorherige Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ für einen idealen Paarwechsel $\{S_1, S_{c,1}\} \rightarrow \{S_3, S_{c,3}\}$ entworfen worden ist, wurde der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ bereits beim Entwurf als ein nicht idealer Zustands-Paarwechsel $\{S_3, S_{c,3}\} \rightarrow \{S_1, S_{c,3}\} \rightarrow \{S_1, S_{c,1}\}$ konzipiert (Abb. 5.25).

Zu Beginn des Übergangs wird mit dem Oberkörper eine Trajektorie gefahren ($S_{c,3}$) um die Normalkraft der Vorderräder verschwinden zu lassen $\lambda_4 < 0$, sodass der Unterkörper abhebt (S_1), $\phi < \frac{\pi}{2}$. Man schaltet die Reglerstruktur jedoch nicht direkt bei der Identifikation des Abhebens in den Zustand $S_{c,1}$, sondern erst bei einer gewissen Schwelle des Unterkörperwinkels ϕ . Dadurch ist für eine kurze Zeit das Strecke-Regler Paar $\{S_1, S_{c,3}\}$ aktiv. Die Schwelle zum Umschalten in den Reglerzustand $S_{c,1}$ wurde auf minimale Amplitudenausschläge der Position l des SCD beim Umschalten optimiert.

In dieser Strategie zum Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ wäre es ungünstig, direkt zum Reglerzustand $S_{c,1}$ (Balancieren) umzuschalten, während sich das SCD noch mit allen Rädern auf dem Boden befindet (S_3), weil dann der benötigte Raum (bezogen auf den Unterkörperwinkel ϕ) einseitig begrenzt ist, $\phi \leq \frac{\pi}{2}$. Zumindest eine der notwendigen Bewegungsrichtungen ist dadurch in der Stabilisierungsfunktion behindert.

Eine alternative Strategie, welche unter Umständen einen idealen Paarwechsel beim Entwurf einbezieht, wird im Ausblick beschrieben.

5.9.2 Stabilität des Gesamtsystems

Die Stabilität in den einzelnen diskreten Zuständen ist durch die durchgeführten Analysen gewährleistet. Im Zustand S_3 (Fall mit dem vollaktuierten System) führt die Methode der exakten Linearisierung mit anschließender Stabilisierung zur asymptotischen Stabilität im gesamten Zustand S_3 . Im Zustand S_1 wird das System lokal (entlang der Ruhelagekennlinie f_{bal}) asymptotisch stabil.

Da es sich hier um ein hybrides System handelt, müssen auch der Übergang und der Erhalt der einzelnen diskreten Zustände betrachtet werden. Konkret wurden die Zustandsübergänge zwischen den beiden hybriden Ruhelagen $\mathcal{H}_{1,0}$ und $\mathcal{H}_{3,0}$ betrachtet.

Beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, welcher beim Übergang von der Ruhelage $\mathcal{H}_{1,0}$ zur Ruhelage $\mathcal{H}_{3,0}$ auftritt, ist das System nach dem Auslösen des Übergangsverlaufes bis zur Bodenkontaktaufnahme lokal stabil im Sinne von *Ljapunov*. Die zusätzlich eingeleitete Bewegung der Variable l erhöht die Robustheit des Übergangs in Bezug auf Ungenauigkeiten und Störungen im Realsystem. Falls die Störungen jedoch eine Schwelle überschreiten sollten (z.B. eine hohe externe Störkraft), dann kann es statt des Absetzens zum Abheben des Unterkörpers kommen. Diese unerwünschte Bewegung wird im Realsystem nach Erreichen eines bestimmten Schwellwerts unterbrochen und zurück zum lokal stabilisierenden Regler in S_1 gebracht. Nach dem Erreichen der Ruhelage in S_1 wird in diesem Entwicklungsstand kein selbständiges erneutes Absetzen ausgelöst. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der grundlegenden Funktionalität des SCD ohne Betrachtung solch großer Störungen.

Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ zeigte ein stabiles Verhalten mit geringerer Empfindlichkeit gegenüber Störungen.

Eine Möglichkeit zum Einbeziehen größerer Störungen während der Zustandsübergänge und beim Erhalt bestimmter Zustände wird im Ausblick gegeben.

5.10 Positionsregelung

Während der beschriebene Reglerentwurf in Simulationen die grundlegende Funktionalität des SCD sicherstellen konnte, traten am realen SCD Ungenauigkeiten in der Positionierung des SCD auf, welche die grundlegende Funktionalität beeinträchtigen. Dies tritt insbesondere beim Steigen der Treppe auf.

Durch einen statischen Vorfilter, der modellbasiert entworfen wird, kann eine stationäre Sollwertfolge eingestellt werden [51]. Aufgrund von Ungenauigkeiten des Modells kann in der Realität deshalb das Steuerungsziel nicht oder nicht mehr exakt erreicht werden. Das Folgen einer Sollposition wird daher mit einem zusätzlichen PI-Regler und einer Vorsteuerung gelöst (Abb. 5.26).

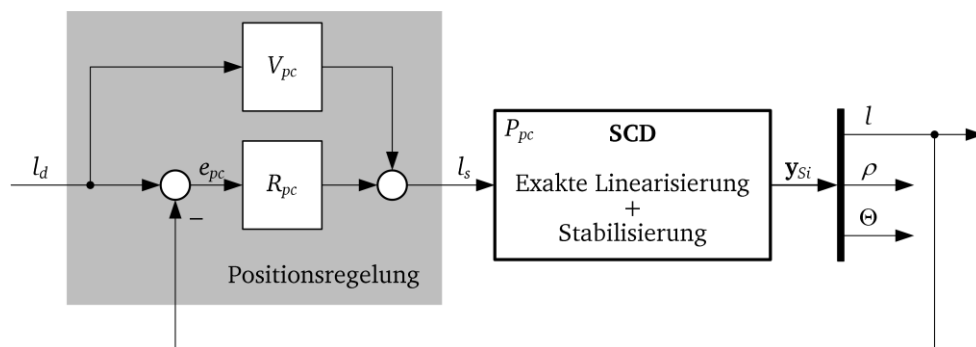


Abb. 5.26: Positionsregelung des SCD.

Als Stellgröße der Positionsregelung einschließlich des PI-Reglers

$$R_{pc}(s) = K_{P,pc} + K_{I,pc} \frac{1}{s} \quad (5.82)$$

dient die Sollposition l_s des hier als untergelagert betrachteten Systems mit der Blockbezeichnung „SCD Exakte Linearisierung + Stabilisierung“ in Abb. 5.26. Dieser Block beinhaltet das Gesamtsystem des SCD aus regelungstechnischer Sicht (Abb. 5.24) mit Ausnahme der hier betrachteten Positionskaskade.

Die Positionskaskade in Abb. 5.26 ist sowohl im Reglerzustand $S_{c,1}$ (Balancieren des SCD auf Hinterrädern) und $S_{c,3}$ (Regelung des SCD mit allen Rädern auf dem Boden) aktiv, jedoch nicht beim Absetzen im Zustand $S_{c,1}$. Das erfolgreiche Absetzen wird beim realen SCD mit einer relativ kleinen Sollwertänderung l_s am Anfang des Vorgangs robuster gegenüber Ungenauigkeiten gemacht (Kapitel 5.7.2) und würde mit der beschriebenen zusätzlichen Positionskaskade verfälscht werden. Zudem sind die Positionsamplituden beim Absetzen des SCD akzeptabel. Da im Betrieb des SCD die Positionsregelung je nach Zustand ein- und ausgeschaltet wird, muss der Anfangswert des Integrators im Regler (5.82) bei ausgeschalteter Positionsregelung auf einen entsprechenden Wert gesetzt werden, um beim Einschalten der Positionsregelung dynamisch unerwünschtes Verhalten zu vermeiden.

Für den Zweck der Positionsregelung kann die Strecke vereinfacht als ein Glied zweiter Ordnung dargestellt werden

$$P_{pc}(s) = \frac{l(s)}{l_s(s)} = \frac{-\tau_{pc,3}s + 1}{(\tau_{pc,1}s + 1)(\tau_{pc,2}s + 1)} \quad (5.83)$$

wobei die negative Zeitkonstante $\tau_{pc,3}$ die nicht minimalphasige Eigenschaft des Systems abbildet.

Bezüglich Abb. 5.26 kann die folgende Übertragungsfunktion des Regelkreises aufgestellt werden

$$T_{pc}(s) = \frac{l(s)}{l_d(s)} = P_{pc}(s) \frac{R_{pc}(s) + V_{pc}(s)}{1 + P_{pc}(s)R_{pc}(s)}. \quad (5.84)$$

Das Vorsteuerungsglied $V_{pc}(s)$ ist lediglich ein Proportionalfaktor

$$V_{pc}(s) = K_{ff,pc}. \quad (5.85)$$

Unter Einbeziehung der Strecke P_{pc} (5.83), des Reglers R_{pc} (5.82) und der Vorsteuerung V_{pc} (5.85) erhält man einen Nenner der Übertragungsfunktion (5.84) $\text{Den}(T_{pc}(s))$ dritter Ordnung, welcher die Eigendynamik des Positionsregelkreises bestimmt. Der Nenner kann über die Reglerparameter $K_{P,pc}$ und $K_{I,pc}$ beeinflusst werden, welche am realen SCD so gewählt wurden

$$K_{P,pc} = 0.7, \quad K_{I,pc} = 0.9, \quad (5.86)$$

dass sich ein stabiles und gut gedämpftes Führungsverhalten ($\approx 5\%$ bis 10% Überschwingung) des Systems ergab. Im stationären Zustand wird durch den Integrator im Regler die Regelabweichung $e_{pc} = l_d - l$ eliminiert. Da der Regelkreis in Abb. 5.26 lediglich als Positionskorrektur wirkt, gibt es keine Anforderungen an eine hohe Dynamik. Somit wird das unterlagerte System des SCD durch die Positionsregelung dynamisch nur gering beeinflusst. Da sich das unterlagerte System im

Zustand S_1 mit dem Arbeitspunkt dynamisch ändert, muss sichergestellt werden, dass das System im ganzen Arbeitsbereich die Anforderungen beibehält.

Der Zähler $\text{Num}(T_{pc}(s))$ besteht aus einem Polynom zweiter Ordnung

$$\text{Num}(T_{pc}(s)) = (K_{I,pc} + s(K_{ff,pc} + K_{P,pc}))(-\tau_{pc,3}s + 1), \quad (5.87)$$

welches das Eingang-Ausgangs-Verhalten bestimmt. Die Nullstelle, welche das nicht minimalphasige Verhalten verursacht $-\tau_{pc,3}$, tritt weiterhin auf. Eine weitere Nullstelle kommt durch das Regelgesetz (5.82) und (5.85) hinzu. Die Reglerparameter $K_{P,pc}$ und $K_{I,pc}$ wurden bereits anhand der Anforderungen an das dynamische Eigenverhalten des Systems bestimmt. Einen weiteren Freiheitsgrad stellt die Vorsteuerung $K_{ff,pc}$ dar. Der Wert $K_{ff,pc} = -K_{P,pc}$ kompensiert die Nullstelle der Übertragungsfunktion (5.87). Somit wird die Dynamik des Eingang-Ausgangs-Verhaltens zwar verlangsamt, aber die unerwünschte Unterschwingung (in der Nähe einer Treppe) wegen der nicht minimalphasigen Eigenschaft kann vermindert werden (Abb. 5.27).

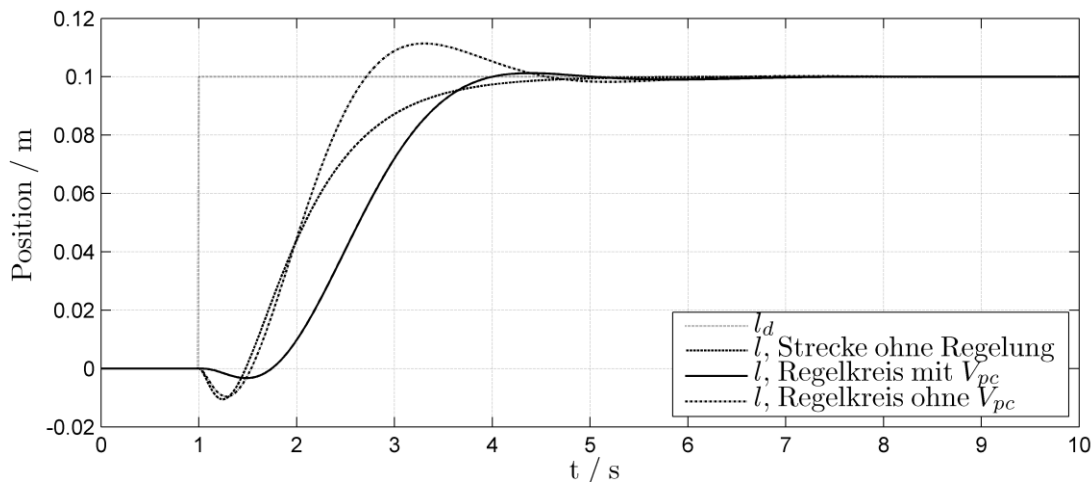


Abb. 5.27: Simulationsverläufe der Positionsregelung des SCD. Sprungantworten des offenen Regelkreises (Strecke), des geschlossenen Regelkreises mit und ohne Vorsteuerung V_{pc} .

5.11 Fazit

Als Basis der vorgestellten regelungstechnischen Methodik wurde, um die nichtlineare Eigenschaft des SCD zu kompensieren, die exakte Linearisierung verwendet. Die Methoden sind modellbasiert, weshalb entsprechend der betrachteten Zustände (S_1 – Bodenkontakt nur mit Hinterrädern und S_3 – Bodenkontakt mit Hinter- und Vorderrädern) die Modelle aus Kapitel 4 benötigt wurden.

Im Zustand S_3 konnte die exakte Linearisierung mit vollem relativem Grad (Eingang-Zustand) durchgeführt werden, was zu einem vollständig linearisierten und entkoppelten System führt. Die Ausgangsfunktion des Regelungssystems besteht aus der Position l , dem Oberkörperwinkel ρ und dem Drehwinkel θ . Mit drei zusätzlichen PD-Reglern (jeweils für jede Ausgangsgröße) und entsprechender Vorsteuerung konnte ein ideales Führungsverhalten erzielt werden (Abb. 5.6).

Im Zustand S_1 (Kapitel 5.5) handelt es sich im Gegensatz zu Zustand S_3 um ein System mit nicht vollem relativem Grad. Bei der gleichen Aktoranzahl kommt der Unterkörperwinkel ϕ als ein zusätzlicher Freiheitsgrad hinzu. Die Anwendung der exakten Linearisierung mit der gleichen Ausgangsfunktion (wie im S_3) führt zum Aufteilen des Regelungssystems in eine global linearisierte externe Dynamik (Eingang-Ausgang Linearisierung) und eine restliche nichtlineare interne Dynamik, welche die Bewegung des Unterkörpers ϕ bestimmt. Die obere Ruhelage des Systems wurde mit einer Analyse der Nulldynamik (Abb. 5.8) als instabil identifiziert. Physikalisch erhält man mittels der exakten Linearisierung ein einfaches inverses Pendel. Deshalb wurde zum Erhalt der oberen Ruhelage das gewonnene partiell exakt linearisierte System mit einem zusätzlichen *gain scheduling* (entlang der Ruhelagekennlinie f_{bal}) LQ-Regler lokal stabilisiert (Kapitel 5.5.2). Das Führungsverhalten des erhaltenen Systems konnte aufgrund der instabilen Nulldynamik (nicht minimalphasiges System) nicht ideal entworfen werden, es wurde mit einem geeigneten Vorfilter jedoch signifikant verbessert (BSB in Abb. 5.9).

Die Bedingung zum Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ erschließt sich als relativ einfach mit dem Verschwinden eines bestimmten Bodenabstandes $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Die Bedingung zum Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ (auch $S_3 \rightarrow S_2$) wurde für den Fall ermittelt, dass lediglich eine Oberkörperbewegung ρ stattfindet. Diese Zustandsübergänge treten beim Verschwinden der entsprechenden Normalkräfte der Räder zum Boden auf. Abb. 5.13 zeigt Bereiche, in denen diese Bedingungen erfüllt sind. Aus den erwähnten Bedingungen wurden Strategien für stabile Zustandsübergänge entwickelt.

Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ (Kapitel 5.7) beginnt im lokal stabilen Zustand S_1 mit dem Umschalten zum Absetzen (Abb. 5.15). Das Absetzen wurde im Rahmen des Konzeptes der virtuellen Bindung, welches mit einer entsprechenden Ausgangsfunktion entworfen wurde, realisiert. Diese Ausgangsfunktion (Abb. 5.16) koppelt die Bewegung des Oberkörpers ρ an den Unterkörper ϕ derart, dass ein stabiler und sanfter ($\dot{\phi} \approx 0, \dot{\phi} > 0$) Übergang ermöglicht wird. Die erhaltene Nulldynamik (Abb. 5.17) charakterisiert das dynamische Verhalten des SCD als ein lokal stabiles Verhalten im Sinne von *Ljapunov*. Dieses Verhalten („Fallen“ zum Boden) nimmt durch eine kleine zusätzliche Positionsbewegung am Anfang des Übergangs den gewünschten Verlauf robuster an (bedeutend am Realsystem). Als Konsequenz eines sanften Übergangs tritt das SCD in den Zustand S_3 mit einer gewissen Oberkörpergeschwindigkeit $\dot{\rho}$ ein, welche im Zustand S_3 nach einer bestimmten Trajektorie abgebaut wird (Kapitel 5.7.3).

Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ wird einfacher mit einer entsprechenden Trajektorie in S_3 ausgelöst. Bei einem bestimmten Schwellwert des Unterkörpers wird dann auf die lokal stabilisierende Regelung in S_1 umgeschaltet.

Die Reglerstruktur des Gesamtsystems (Abb. 5.24) und die Problematik der realen Zustandsübergänge wurde im Kapitel 5.9 zusammengefasst. Die Stabilität des Gesamtsystems in der hybriden Hinsicht wurde kommentiert.

Für die Implementierung der grundlegenden Funktionalität wurde am Realsystem zusätzlich eine einfache, überlagerte Positionsregelung eingeführt (Kapitel 5.10, Abb. 5.26).

Zur Anwendung der vorgestellten regelungstechnischen Methodik wird der komplette kontinuierliche Zustandsvektor benötigt, weshalb eine genaue Ermittlung des Unterkörperwinkels mittels Sensordatenfusion zweier Sensoren notwendig ist (Kapitel 5.1).

6 Ergebnisse und Anwendung zum Treppensteigen

Die Ergebnisse zur Regelung des SCD in unterschiedlichen Situationen beinhalten in einer Gegenüberstellung sowohl Messdaten des realen SCD (Abb. 6.1) als auch Simulationsverläufe anhand des hybriden Modells des SCD, beschrieben im Kapitel 4.3. Dabei ist darauf geachtet worden, dass Bedingungen am realen SCD beim Modell durch möglichst ähnliche Bedingungen abgebildet werden. Dies betrifft beispielsweise die Anfangs- und Endzustände. Die Regelparameter des realen SCD und des Modells in den Vergleichen sind identisch.

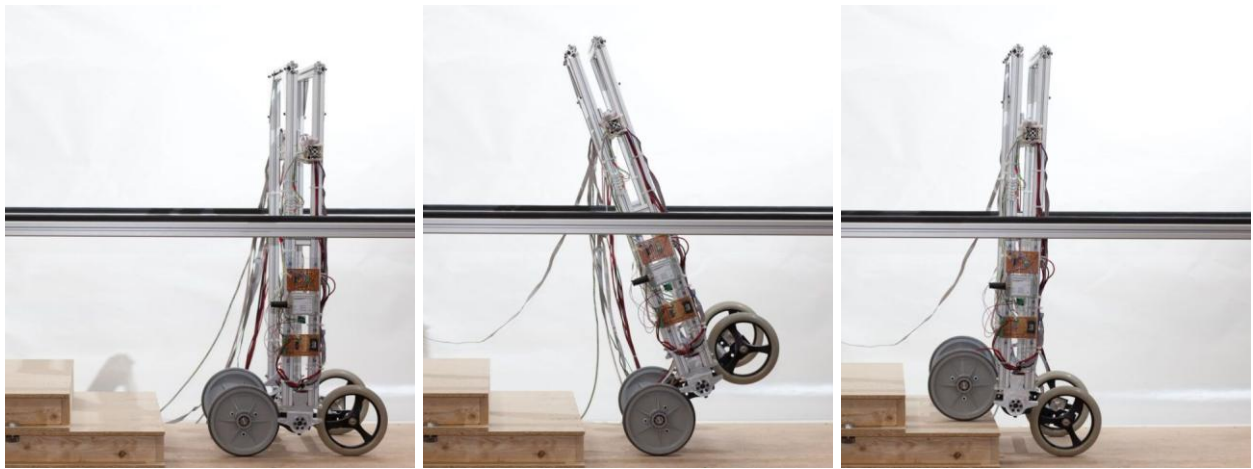


Abb. 6.1: SCD Zustände: Alle Räder im Kontakt mit dem Boden S_3 (links), Hinterräder im Kontakt mit dem Boden S_1 (Mitte), SCD an der Treppe S_3 – Anfangsposition für nächste Stufe (rechts).

Zunächst werden die Ergebnisse auf ebenem Boden dargestellt (Kapitel 6.1), danach beim Steigen der Treppe (Kapitel 6.2). Einige Parameter mussten für die Anwendung zum Treppensteigen neu bestimmt werden. Dies betrifft die Bindungsfunktion (5.75) (Abb. 5.16), deren neu bestimmte Parameter in Kapitel 6.2 dargestellt werden.

Um die Ergebnisse beurteilen zu können, werden im Kapitel 6 hier nur die wesentlichen Größen dargestellt. Zusätzliche gemessene Größen und Simulationsdaten sowie eine Beschreibung der Diagrammbeschriftung „Logik“ (Bsp. in Abb. 6.6) sind im Anhang im Teil D zu finden. Die Simulationsdaten beinhalten zusätzlich Größen, welche beim realen SCD nicht messbar sind (z.B. Normalkräfte bei den Rädern).

Um die gemessenen Größen von den Simulationsgrößen unterscheiden zu können, werden die gemessenen Größen mit einem zusätzlichen Index m (Messung) gekennzeichnet.

Während der Neigungswinkel ϕ und dessen Geschwindigkeit $\dot{\phi}$ in der Simulation unmittelbar (ohne Sensordatenfusion) vorliegen, ist am realen System eine Sensordatenfusion notwendig. Der Istwert des Unterkörperwinkels wird mit ϕ_m bezeichnet, obwohl es sich um den Wert des fusionierten Winkels handelt. Analoges gilt für die Unterkörperwinkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_m$.

Die Simulationen sind ohne den Einfluss der *Coulombschen* Reibung dargestellt. Beim realen SCD wurden die Schwingungsamplituden wegen der *Coulombschen* Reibung in den Radantrieben mit

einem Reibungskompensator nach dem Prinzip aus [8] erfolgreich reduziert. Bei den Körperantrieben verzichtet man aufgrund der kleinen Regelabweichungen des Oberkörperwinkels ρ_m auf diese Kompensation.

Weitere nicht modellierte Einflüsse am realen SCD, die im Modell nicht berücksichtigt sind: die vom SCD hängenden Spannungsversorgungs- und Sensorkabel, Elastizitäten der Konstruktion und der Antriebe, die Nachgiebigkeit der Gummischichtung der Vorderräder, Rauschen in der Sensor Elektronik und Quantisierung der Sensorsignale, vgl. Abb. 6.1.

Anhand von Messungen am realen SCD wurde bestätigt, dass die Annahme plastischer Stöße zutreffend ist ($\epsilon_N = 0$).

Um den Einfluss der zusätzlichen Positionsregelung (Kapitel 5.10) am realen SCD nachzubilden, wurde die Positionsregelung auch in der Simulation angewendet.

Zur Illustrierung des realen SCD sind in Abb. 6.1 einige übliche Situationen des SCD dargestellt. Bei dargestellten Simulationsverläufen wird für eine leichtere Deutung der Resultate ein Umriss-Diagramm hinzugefügt.

6.1 Ebener Boden

Die wichtigsten Größen in der Beurteilung der quantitativen Eigenschaften der Regelung in einzelnen Zuständen und bei den Zustandsübergängen sind die Position l , der Oberkörperwinkel ρ und der Drehwinkel θ . Bei den Zustandsübergängen ist die Bewegung des Oberkörpers ρ und des Unterkörpers ϕ von besonderer Wichtigkeit, weshalb auch die Geschwindigkeiten $\dot{\rho}$ und $\dot{\phi}$ dargestellt sind. Die Aktorströme tragen zur Erklärung einiger, im Realsystem auftretender Störungen wie z.B. dem Einfluss der *Coulombschen* Reibung und dem Einfluss der Stellgrößenbegrenzung bei. Bei den Zustandsübergängen vervollständigen die diskreten Zustände des Regelungssystems das Verhalten im kompletten hybriden Zusammenhang.

6.1.1 Regelung im Zustand S_3

Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ (Abheben) wird mit einer bestimmten Bewegung des Oberkörpers eingeleitet, wobei der Oberkörperwinkel ρ geregelt werden muss. Um die Zustandsänderungen nach den Überlegungen aus Kapitel 5.8 auslösen zu können, ist ein ausreichend genaues Führungsverhalten der Regelgröße ρ notwendig. Dabei sollen die restlichen Freiheitsgrade l und θ idealerweise im Ruhestand bleiben. In dem hier betrachteten Fall der Bewegung in S_3 , bei welchem auch der Unterkörperwinkel ϕ im Ruhestand bleibt, ist die Bewertung dieser Regelung isoliert von sonstigen Einflüssen möglich.

Die Regelung im Zustand S_3 , entsprechend Kapitel 5.4, wird durch eine Bewegung des Oberkörpers ρ_s nach einem kubischen Polynom demonstriert.

Während bei dem geregelten Oberkörperwinkel ρ gegenüber der Sollgröße ρ_s keine größeren Unterschiede bemerkbar sind (Abb. 6.2), treten in den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\rho}$ Abweichungen zu $\dot{\rho}_s$ auf, welche auf nicht ideales Führungsverhalten hindeutet.

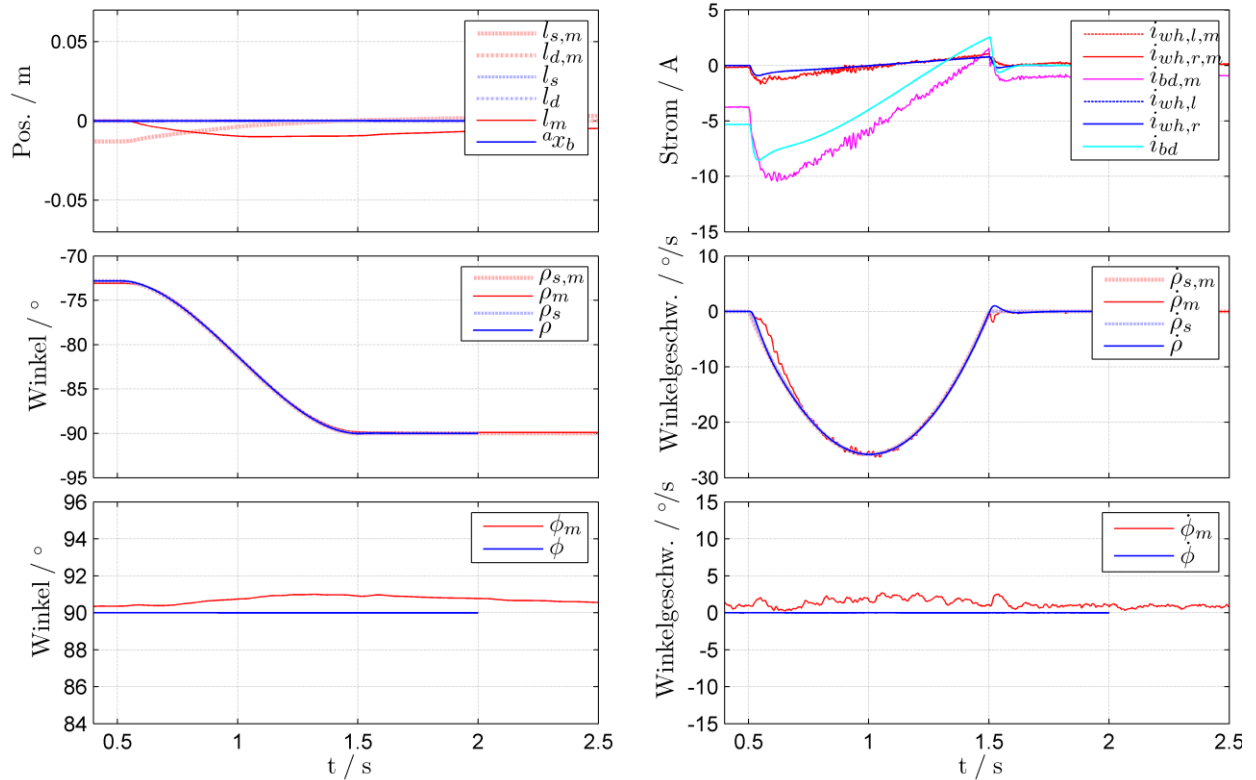


Abb. 6.2: Regelung im Zustand S_3 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = \rho_{s,m} = -72.8^\circ \rightarrow -90^\circ$, Dauer 1 s. Vergleich Simulation und Messung.

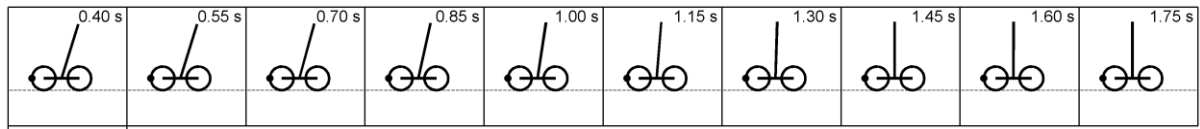


Abb. 6.3: Regelung im Zustand S_3 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = \rho_{s,m} = -72.8^\circ \rightarrow -90^\circ$, Dauer 1 s. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

Eine geringe Regelabweichung tritt auch in Simulationen des Modells auf, obwohl man hier theoretisch ein ideales Führungsverhalten erwartet. Die Ursache dafür liegt hauptsächlich in den Verzögerungen, welche im Regelkreis auch im Simulationsmodell vorhanden sind, beim Reglerentwurf aber nicht berücksichtigt wurden. Am Ausgang des Reglers sind die Aktorgrößen mit einem PT_1 -Glied (Zeitkonstante jeweils 5 ms) versehen, um die Verzögerungen des elektrischen Teils des DC-Motors und der D/A Wandlung nachzubilden.

Am realen SCD ist die Geschwindigkeitsdifferenz $\dot{\rho}_{s,m} - \dot{\rho}_m$ noch etwas größer, was auf die *Coulombsche* Reibung des Oberkörperantriebs zurückzuführen ist. Im Modell für den Reglerentwurf ist nur viskose Reibung enthalten, weil die exakte Linearisierung nur für glatte Nichtlinearitäten geeignet ist. Im Simulationsmodell ist die *Coulombsche* Reibung ebenfalls nicht enthalten, womit Ergebnisse erhalten werden können, welche die Korrektheit der verwendeten Regelgesetze bestätigen. Dies wird auch bei Betrachtung des Stromes $i_{body,m}$ (Abb. 6.2) des realen SCD gegenüber der Simulation bestätigt, wo Amplitudenunterschiede am Anfang der Oberkörperbewegung ($t \approx 0.5$ s) sichtbar sind, welche durch Sollwertänderung und Reibungseinflüsse entstehen.

Der reale Neigungswinkel ϕ_m , welcher idealerweise 90° betragen müsste, weist während der Bewegung des Oberkörpers eine leichte Abweichung auf. Anhand der Oberkörperbewegung bildet sich im Unterkörper des SCD ein Reaktionsmoment, welches die Amplituden der Normalkräfte λ_3 und λ_4 zum Boden beeinflusst. Wegen der nachgiebigen Gummischichtung der Räder kommt es zu leichten Änderungen des Unterkörperwinkels ϕ_m .

Die Abweichungen der SCD-Position $l_{d,m} - l_m$ sind gering, was auf eine gute Entkopplung der Freiheitsgrade (Koordinaten ρ und l) durch die exakte Linearisierung hindeutet.

Quantitative Eigenschaften des realen Regelungssystems aus Abb. 6.2:

- max. dynamische Positionierungsdifferenz: $\max(l_m - l_{d,m}) = 1.1 \text{ cm}$,
min. dynamische Positionierungsdifferenz: $\min(l_m - l_{d,m}) = -1.0 \text{ cm}$,
- max. absolute dynamische Oberkörperwinkeldifferenz: $\max|\rho_{s,m} - \rho_m| = 0.4^\circ$, max. absolute dynamische Oberkörperwinkelgeschwindigkeitsdifferenz: $\max|\dot{\rho}_{s,m} - \dot{\rho}_m| = 4.4^\circ/\text{s}$,
- max. absolute Drehwinkeldifferenz: $\max|\theta_{s,m} - \theta_m| = 0.1^\circ$.

Durch Simulationen und Messungen konnte, trotz der Abweichung des Oberkörperwinkels ρ gegenüber der Sollgröße ρ_s , am Anfang der Bewegung eine ausreichend hohe Führungsgenauigkeit festgestellt werden, um die grundlegende Funktionalität des SCD zu gewährleisten.

6.1.2 Regelung im Zustand S_1

In Zustand S_1 soll zunächst stabilisiert werden und dann der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ (Kapitel 6.1.3), also das Absetzen auf den Boden, eingeleitet werden. Dazu wird der Oberkörperwinkel ρ geregelt, weil dadurch unmittelbar die Bewegung des Unterkörpers ϕ beeinflusst wird, welche dann schließlich durch Bodenkontaktaufnahme zu gewünschten Zustandsübergängen $S_1 \rightarrow S_3$ führt. Das Unterdrücken der Auswirkungen von Störungen auf die Position l (und auch θ) bei der Stabilisierung bzw. Einleitung der erwähnten Oberkörperbewegung ist dabei wichtig, weil der Raum im Treppengang begrenzt ist und die grundlegende Funktionalität ansonsten gefährdet ist.

Die Regelung im Zustand S_1 , entsprechend Kapitel 5.5.2, wird wie auch in S_3 , durch eine Bewegung des Oberkörpers ρ_s nach einem kubischen Polynom demonstriert. Durch den Erhalt der Ruhelage bewirkt eine Änderung des Oberkörpers ρ eine entsprechende Änderung des Unterkörpers ϕ (Abb. 6.4 und Abb. 6.5).

Der Verlauf des Oberkörpers folgt der vorgegebenen Sollgröße mit geringer Abweichung. Simulation und Messung stimmen mit geringen, hochfrequenten Abweichungen infolge von Rauschen und hochfrequenten Schwingungen gut überein.

Größere Unterschiede treten bei der Position l_m auf. Hier liegt eine Kopplung der Oberkörperbewegung ρ_m zur Position l_m vor. Diese resultiert aus dem Zustandsregler in S_1 (Kapitel 5.5.2), welcher alle Zustandsvariablen der longitudinalen Dynamik (die Variablen der externen Dynamik $l_m, \dot{l}_m, \rho_m, \dot{\rho}_m$ und internen Dynamik $\phi_m, \dot{\phi}_m$) koppelt, und tritt bereits in Simulationen auf. Zudem ist der Zustandsregler wegen der Begrenzung des Aktors (Strombegrenzung bei $\pm 11.4 \text{ A}$) so ausgelegt, dass die Aufgabe des Balancierens hauptsächlich mit den Radantrieben ($i_{long,m} = i_{r,m} + i_{l,m}$) und weniger mit dem Oberkörperantrieb ($i_{body,m}$) ausgeführt wird. Das Aufrechterhal-

ten der oberen Ruhelage für die nicht minimalphasige Dynamik des SCD muss daher hauptsächlich mit den Radantrieben bewältigt werden. Die Stellgröße $i_{body,m}$ ist mit dem Abheben des SCD fast vollständig ausgereizt (Abb. 6.4). Eine Begrenzung des Stromes $i_{body,m}$ kann die Stabilität des SCD gefährden.

Ein weiterer Einfluss, der Unterschiede zwischen Simulation und Messung bewirkt, ist die *Coulombsche* Oberkörperantriebsreibung. Am deutlichsten sieht man den Unterschied zu Beginn der Oberkörperbewegung ($t \approx 1$ s) im Strom $i_{body,m}$ (Abb. 6.4). Um dem Oberkörpersollwinkel zu folgen, verursacht der Regler mit der plötzlichen Stellgrößenänderung $i_{body,m}$ das Überwinden des Reibungsmoments. Diese plötzliche Änderung, welche im Regelgesetz der untergelagerten exakten Linearisierung nicht enthalten und deshalb innerhalb dieser nicht kompensiert werden kann, verursacht einen Störeinfluss auf die longitudinale Dynamik des SCD. Dies ist detailliert beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ im Kapitel 6.1.3 beschrieben.

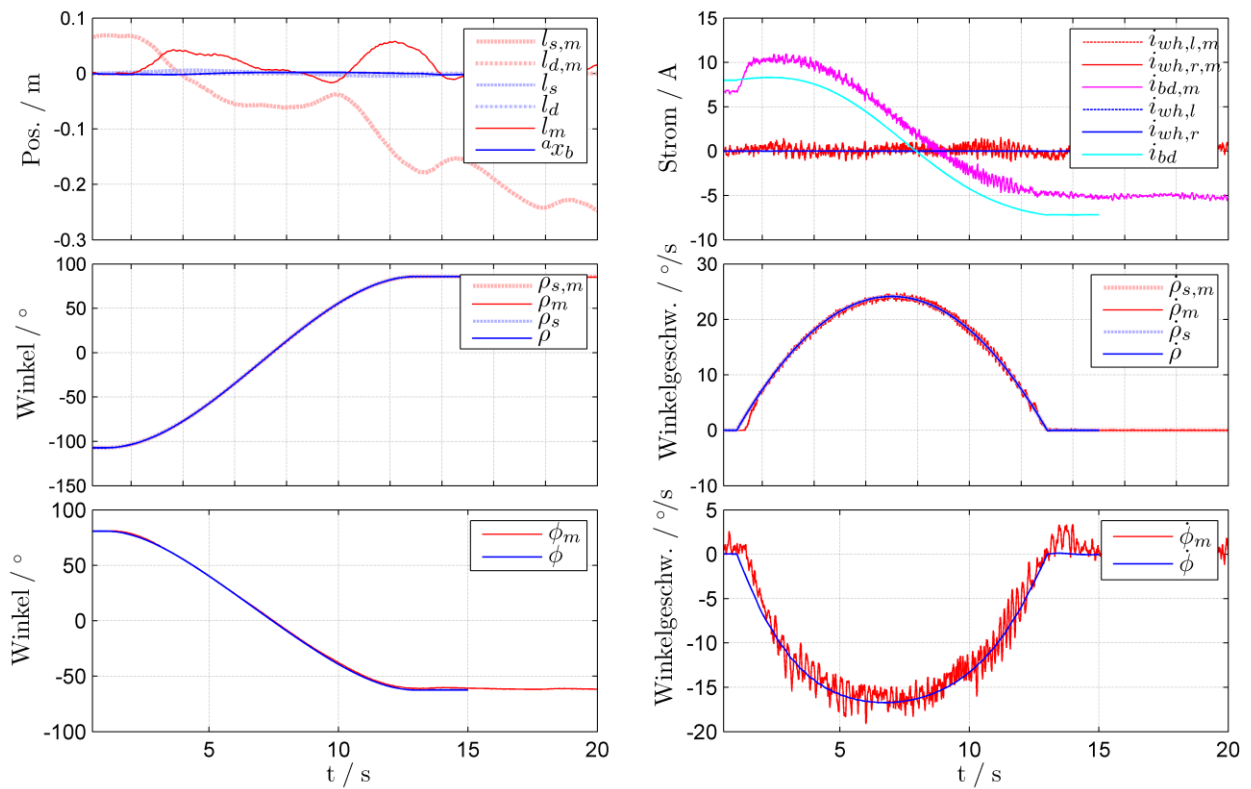


Abb. 6.4: Regelung im Zustand S_1 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = \rho_{s,m}: -110.6^\circ \rightarrow 85.9^\circ$, Dauer 12 s. Vergleich Simulation und Messung.

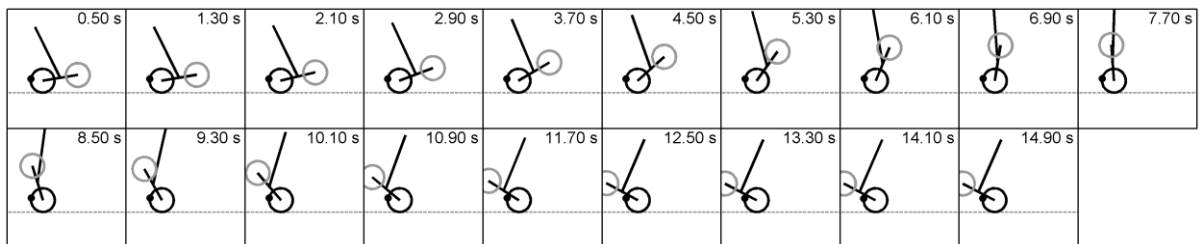


Abb. 6.5: Regelung im Zustand S_1 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = \rho_{s,m}: -110.6^\circ \rightarrow 85.9^\circ$, Dauer 12 s. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

Quantitative Eigenschaften des realen Regelungssystems aus Abb. 6.4:

- max. dynamische Positionierungsdifferenz: $\max(l_m - l_{d,m}) = 5.8 \text{ cm}$,
min. dynamische Positionierungsdifferenz: $\min(l_m - l_{d,m}) = -1.7 \text{ cm}$,
- max. absolute dynamische Oberkörperwinkeldifferenz: $\max|\rho_{s,m} - \rho_m| = 1.2^\circ$, max. absolute dynamische Oberkörperwinkelgeschwindigkeitsdifferenz: $\max|\dot{\rho}_{s,m} - \dot{\rho}_m| = 2.7^\circ/\text{s}$,
- max. absolute Drehwinkeldifferenz: $\max|\theta_{s,m} - \theta_m| = 1.0^\circ$.

Die Bewegung des Oberkörpers ρ verläuft mit ausreichender Geschwindigkeit und Genauigkeit, um die Bewegung zur nächsten Treppe zu ermöglichen. Der Einfluss von Störungen auf die Position l wird dabei durch die Regelung klein genug gehalten, um die betrachtete Treppe mit der Auftrittsbreite $D_{st} = 25 \text{ cm}$ problemlos einzuhalten und somit die grundlegende Funktionalität zu ermöglichen.

6.1.3 Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$

Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ soll stabil (eindeutig und ohne Rückfälle) stattfinden. Das Absetzen zum Boden soll möglichst „sanft“ (mit ausreichend kleiner Unterkörpergeschwindigkeit $\dot{\phi}$) stattfinden. Ebenso soll nach dem Absetzen kein weiterer unerwünschter Zustandsübergang stattfinden. Während des Zustandsübergangs soll die Position l wegen der Stufennähe möglichst unverändert bleiben, um ein Anstoßen an die Stufe zu vermeiden.

Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ erfolgt entsprechend Kapitel 5.7. Die Reglerstruktur des Gesamtsystems in Abb. 5.24 zeigt dazu die Systemstruktur aus regelungstechnischer Sicht.

Der Zustandsübergang beginnt im Strecke-Regler Zustandspaar $\{S_1, S_{c,1}\}$ mit der lokalen Stabilisierung (Kapitel 5.5.2). Bei gewünschtem Start des Übergangs wird zunächst das Absetzen des SCD eingeleitet (Abb. 6.6, Logik, $S_{sys} = \text{fl_a S1}^{43}$). Wie im Kapitel 5.7 beschrieben, beginnt das Absetzen mit dem Umschalten zur virtuellen Bindung und einer relativ kleinen Positionsänderung $\{S_1, S_{c,1}\}$. Nach dem Erreichen der Schwelle von $\phi_{Th} = 87.8^\circ$ wird der Regler in den Zustand $S_{c,3}$ geschaltet $\{S_1, S_{c,3}\}$ wo das Abbremsen des Oberkörpers beginnt (Abb. 6.6, Logik, $S_{sys} = \text{dc_a S3}$). Kurz darauf, nach dem Erreichen des Bodens, wird der Zustand $\{S_3, S_{c,3}\}$ erreicht.

In der Simulation wird der Boden zunächst bei 88° angenommen (Abb. 6.6 und Abb. D.7) und auch bei 89° ($\phi_{Th} = 88.8^\circ$) (Abb. D.10). Zusätzlich sind beide Fälle im Vergleich zur entworfenen virtuellen Bindungsfunktion und der Nulldynamik in Abb. 6.8 dargestellt. Aus den Messungen zeigt sich, dass der Boden im Bereich des Unterkörperwinkels ϕ_m von $[88,89]^\circ$ liegt. Eine genauere Aussage kann mangels objektiver Sensoren nicht getroffen werden.

Der Positionsschub nach dem Umschalten zum Absetzen des SCD ($t = 0 \text{ s}$) wird beim realen SCD mit einer Sollpositionsänderung von $\Delta l_{s,m} = -1 \text{ cm}$ realisiert. In den Simulationen reicht hingegen eine Sollpositionsänderung von $\Delta l_s = -0.03 \text{ cm}$ aus, um ähnliche Resultate zu erreichen.

⁴³ Die Bezeichnung der Diagrammbeschriftung „Logik“ ist im Anhang, Teil D zu finden.

Während der Bewegung des Unterkörpers zum Boden $\phi_m \rightarrow 90^\circ$ folgt der Oberkörperwinkel ρ_m der virtuellen Bindungsfunktion und bei $t \approx 1.0$ s wechselt die Geschwindigkeit des Oberkörpers die Richtung vom Negativen zum Positiven. Im Gegensatz zur Simulation (Abb. 6.6, $\dot{\rho}_m$), ist der Verlauf des gemessenen Oberkörperwinkels nicht glatt, sondern mit einem kurzen Aufenthalt im Bereich $\dot{\rho}_m = 0$ versehen. Die Ursache dafür ist die *Coulombsche* Reibung im Oberkörperantrieb. Der Regler reagiert auf diese sprunghafte Momentänderung durch einen raschen Aufstieg des Aktorstromes $i_{body,m}$ (Anhang, Abb. D.7). Als Konsequenz dieser schnellen Änderung des Aktorstromes und des dadurch erzeugten Aktormoments entsteht ein Reaktionsmoment am Unterkörper des SCD, welches zu einer plötzlichen Änderung der Unterkörpergeschwindigkeit $\dot{\phi}_m$ führt. Da die *Coulombsche* Reibung nicht im Entwurfsmodell mit der exakten Linearisierung behandelt wird, kann dieser negative Effekt ohne weiteres nicht kompensiert werden.

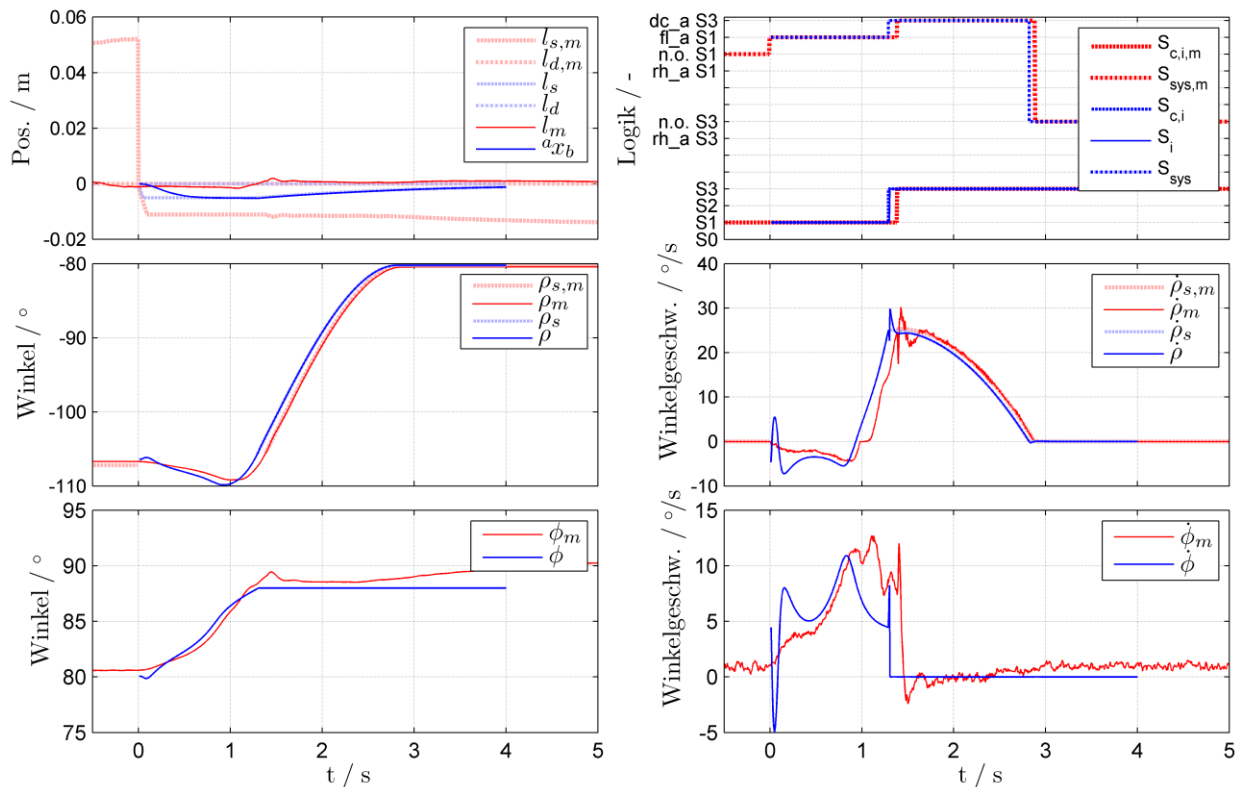


Abb. 6.6: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 88^\circ$. Vergleich Simulation und Messung.

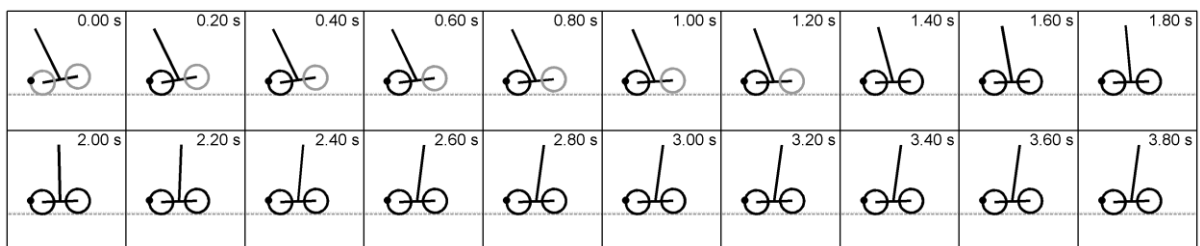


Abb. 6.7: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 88^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

Als nächstes wird das Umschalten zum Zustand $S_{c,3}$ betrachtet ($t \approx 1.3$ s). Sowohl in der Simulation als auch am realen SCD wird im Augenblick des Umschaltens $S_{c,3} \rightarrow S_{c,1}$ der Sollwinkel ρ_s und die Sollgeschwindigkeit $\dot{\rho}_s$ auf den vorhandenen augenblicklichen Wert gestellt und ab die-

sem Wert parabelförmig zu Null abgebaut. Der Winkelwert ρ_s und der Geschwindigkeitswert $\dot{\rho}_s$ werden in der Generierung der Solltrajektorie von den augenblicklichen Werten übernommen, die Beschleunigung $\ddot{\rho}_s$ jedoch nicht. Die Beschleunigung unterliegt beim realen System verstärkt höherfrequenten Einflüssen, weil sie durch zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\dot{\rho}$ ermittelt wird. Um die Empfindlichkeit der Solltrajektorie auf die erwähnten Störungen zu reduzieren, wurde daher die Anfangsbedingung $\ddot{\rho}_s = 0$ gesetzt. Als Nachteil entsteht dadurch allerdings ein impulsartiger Überschwinger, der die Funktion des Zustandsübergangs jedoch nicht gefährdet.

Der Vergleich der Dynamik des realen SCD und der Simulation für die zwei unterschiedlichen Bodenwinkel (Abb. 6.6 bzw. Abb. D.7 und Abb. D.10) im Zeitbereich zeigt qualitativ äquivalentes Verhalten in beiden betrachteten Fällen der Bodenwinkel. Zeitliche Unterschiede zeigen sich in den diskreten Ereignissen, weil die virtuelle Bindung keine Trajektorie⁴⁴ darstellt. Abb. 6.8 stellt die Messung gegenüber den beiden betrachteten Simulationsfällen im Vergleich zur entworfenen Bindungsfunktion (links) und der daraus resultierenden Nulldynamik (rechts) dar. Die beiden Simulationsfälle unterscheiden sich praktisch nur in dem Endwinkel ϕ , bei welchem es zum Bodenkontakt mit den Vorderrädern kommt.

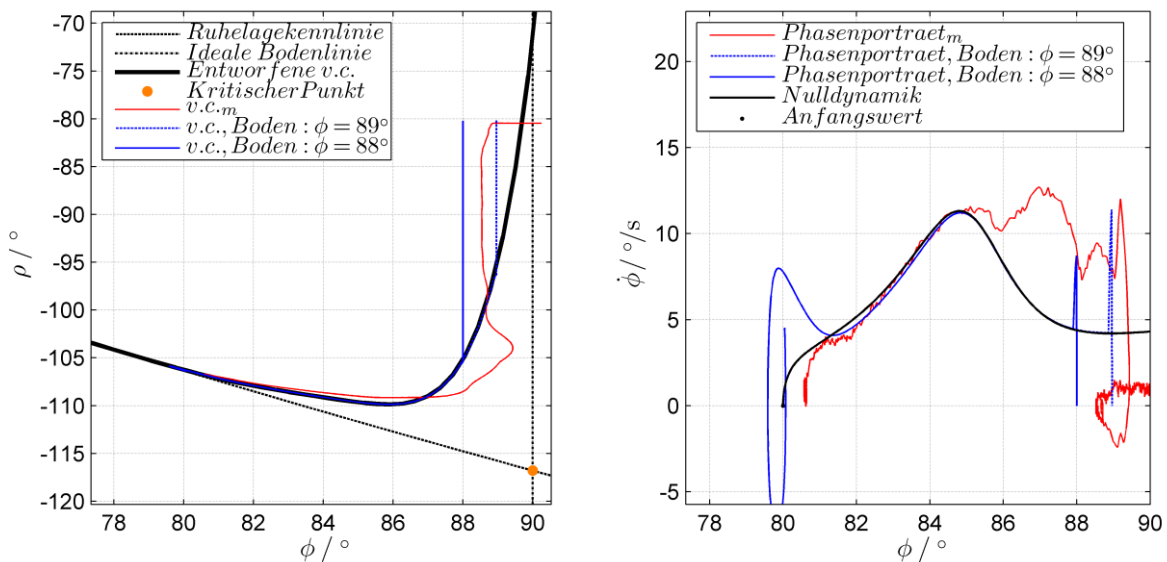


Abb. 6.8: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Vergleich Simulation und Messung. Bindungsfunktion (v.c. = virtual constraint) (links). Phasenporträt der Nulldynamik und interne Dynamik (rechts).

Ein Vergleich der Dynamik des SCD beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ mit der Nulldynamik ist möglich, es muss aber darauf hingewiesen werden, dass damit nur die Variablen der internen Dynamik $\{\phi, \dot{\phi}\}$ dargestellt sind. Während bei Betrachtung der Nulldynamik somit das vollständige Verhalten des Systems eindeutig bestimmt ist, tritt bei der internen Dynamik des SCD zusätzlich der Einfluss der nicht ausgeklungenen externen Dynamik auf.

Quantitative Eigenschaften des realen Regelungssystems aus Abb. 6.6 bzw. Abb. 6.8:

⁴⁴ Eine Trajektorie beinhaltet den zeitlich definierten Verlauf einer Koordinate.

- max. dynamische Positionierungsdifferenz: $\max(l_m - l_{d,m}) = 0.2 \text{ cm}$,
min. dynamische Positionierungsdifferenz: $\min(l_m - l_{d,m}) = -0.2 \text{ cm}$,
- stationäre Oberkörperwinkeldifferenz vor dem Umschalten zum Übergang $S_1 \rightarrow S_3$:
 $\rho_{s,m} - \rho_m = -0.5^\circ$,
- Unterkörperwinkelfehler der Ruhelage vor dem Umschalten zum Übergang $S_1 \rightarrow S_3$:
 $f_{1 \rightarrow 3}^{-1}(\rho_m) - \phi_m = -0.11^\circ$,
- max. absolute Oberkörperwinkeldifferenz der idealen virtuellen Bindung gegenüber dem Messwert während des Übergangs $S_1 \rightarrow S_3$: $\max|\rho_{v.c.} - \rho_m| = 9.4^\circ$,
- max. absolute Oberkörperwinkeldifferenz während des Abbremsens in S_3 : $\max|\rho_{s,m} - \rho_m| = 0.3^\circ$, $\max|\dot{\rho}_{s,m} - \dot{\rho}_m| = 8.0^\circ/\text{s}$,
- max. absolute Drehwinkeldifferenz: $\max|\theta_s - \theta| = 0.5^\circ$.

Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ ist stabil, das Absetzen findet „sanft“ statt, nach dem Absetzen kommt es zu keinen weiteren unerwünschten Zustandsübergängen und während des Zustandsübergangs kommt es zu keinen wesentlichen Positionsänderungen l . Die relativ hohe max. Differenz $\max|\rho_{v.c.} - \rho_m|$ tritt hauptsächlich aufgrund der *Coulombschen* Reibung auf. Trotzdem ermöglicht der Verlauf die grundlegende Funktionalität des SCD mit Erfüllung aller Kriterien.

6.1.4 Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$

Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ soll stabil (eindeutig und ohne Rückfälle) stattfinden. Während des Zustandsübergangs soll die Position l wegen der Stufennähe möglichst unverändert bleiben, um ein Anstoßen an die Stufe zu vermeiden.

Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ wird entsprechend Kapitel 5.8 realisiert. Eine Solltrajektorie für den Oberkörper, um in den Bereich der verschwindenden Normalkraft der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ einzudringen, wurde mittels Simulation ermittelt und für das reale SCD angepasst.

Die zeitlichen Verläufe der Trajektorie sind in Abb. 6.9 bzw. im Anhang in Abb. D.13 dargestellt. Die erwähnten Unterschiede zwischen dem Modell und dem realen SCD machen sich hier bemerkbar.

Trotz dieser Störeinflüsse kann die Teilfunktion des Zustandsübergangs $S_3 \rightarrow S_1$ ohne Rückfälle (erneuter Bodenkontakt mit den Vorderrädern) und übermäßige Schwingungsamplituden der Position l_m erfolgreich realisiert werden. Der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ in der Simulation findet bei $t \approx 0.7 \text{ s}$ statt (Abb. 6.9, „Logik“, S_i). Wann der Zustandsübergang im realen System stattfindet, kann mangels objektiver Sensoren nicht exakt festgestellt werden. Die Umschaltvorgänge in der Reglerstruktur, $S_{c,3} \rightarrow S_{c,1}$ und $S_{c,3,m} \rightarrow S_{c,1,m}$, folgen zeitversetzt bei $t \approx 1.0 \text{ s}$, nach dem beschriebenen realen Übergang (Abb. 5.25). Zu diesem Zeitpunkt befinden sich beide Systeme (Simulationsmodell und reales System) bereits im Zustand S_1 . Ein Unterschied bei $t \approx 0.9 \text{ s}$ im Verlauf der Zustände der Zustandsautomaten für Steuerung/Regelung, $S_{sys,m}$ und S_{sys} , ist auf unterschiedliche Software-Implementierungen der Simulation und des realen Systems zurückzuführen und hier nicht von weiterer Bedeutung.

Obwohl der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ nicht nach dem Prinzip der virtuellen Bindung entworfen wurde, ist es interessant, die Verläufe des Ober- und Unterkörpers, für $S_3 \rightarrow S_1$ im gleichen Dia-

gramm mit der virtuellen Bindung für den Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ (Abb. 6.11, links) und der daraus resultierenden Nulldynamik (Abb. 6.11, rechts) darzustellen. Im Vergleich zur Bindungsfunktion $S_1 \rightarrow S_3$ ist der Verlauf $S_3 \rightarrow S_1$ bis auf die Verlaufsrichtung ähnlich. Beginnend in der Ruhelage am Boden erhebt sich der Unterkörper mit Umgehen des kritischen Punktes zu einer Ruhelage im Zustand S_1 . Der Vergleich zur Nulldynamik zeigt ebenfalls Ähnlichkeiten. Nach dem Auslösen der Unterkörperhebung, beginnend mit einer Geschwindigkeit $\dot{\phi}_m = 0$, bewegt sich der Unterkörper mit einer negativen Geschwindigkeit $\dot{\phi}_m < 0$, welche mit dem Erreichen der Ruhelage in S_1 wieder auf Null gebracht wird. Mit dem Ausschließen der unterschiedlichen Übergangsstrategien der beiden Zustandsübergänge $S_3 \rightarrow S_1$ und $S_1 \rightarrow S_3$ kann eine Spiegelung der Phasentrajektorie im Phasenporträt mit einer rechtsumlaufenden Bewegungsrichtung festgestellt werden. Beim Vergleich der beiden Zustandsübergänge $S_3 \rightarrow S_1$ und $S_1 \rightarrow S_3$ ist der Unterschied der Ruhelagen in S_1 (bei $S_1 \rightarrow S_3$ als Anfangspunkt und bei $S_3 \rightarrow S_1$ als Endpunkt) lediglich auf deren Auswahl zurückzuführen.

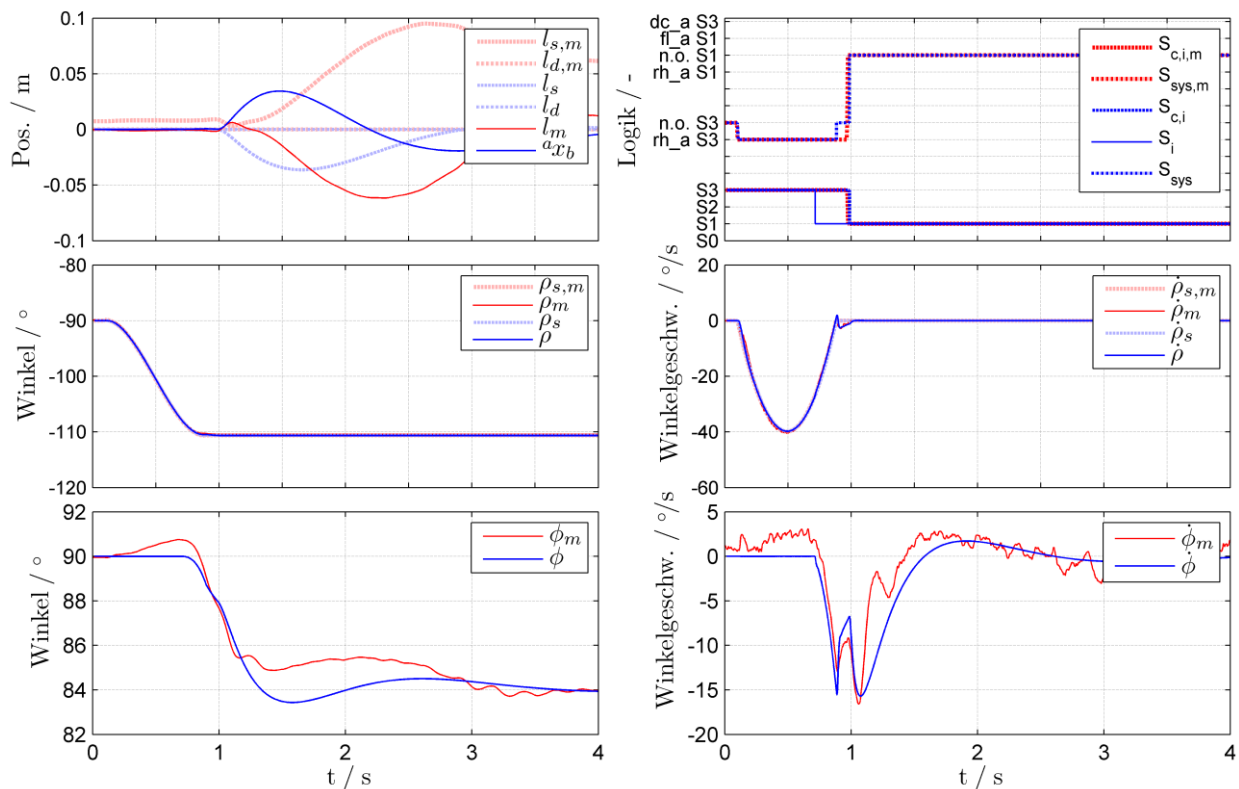


Abb. 6.9: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Umschaltenschwellwert: $\phi = 88^\circ$. Vergleich Simulation und Messung.

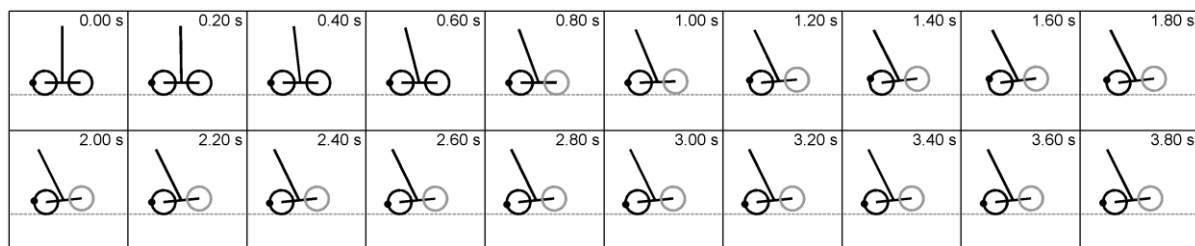


Abb. 6.10: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Umschaltenschwellwert: $\phi = 88^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

Quantitative Eigenschaften des realen Regelungssystems aus Abb. 6.9:

- max. dynamische Positionierungsdifferenz: $\max(l_m - l_{d,m}) = 1.3 \text{ cm}$,
min. dynamische Positionierungsdifferenz: $\min(l_m - l_{d,m}) = -6.2 \text{ cm}$,
- max. absolute dynamische Oberkörperwinkeldifferenz: $\max|\rho_{s,m} - \rho_m| = 0.4^\circ$, max. absolute dynamische Oberkörperwinkelgeschwindigkeitsdifferenz: $\max|\dot{\rho}_{s,m} - \dot{\rho}_m| = 4.3^\circ/\text{s}$,
- max. absolute Drehwinkeldifferenz: $\max|\theta_{s,m} - \theta_m| = 1.1^\circ$.

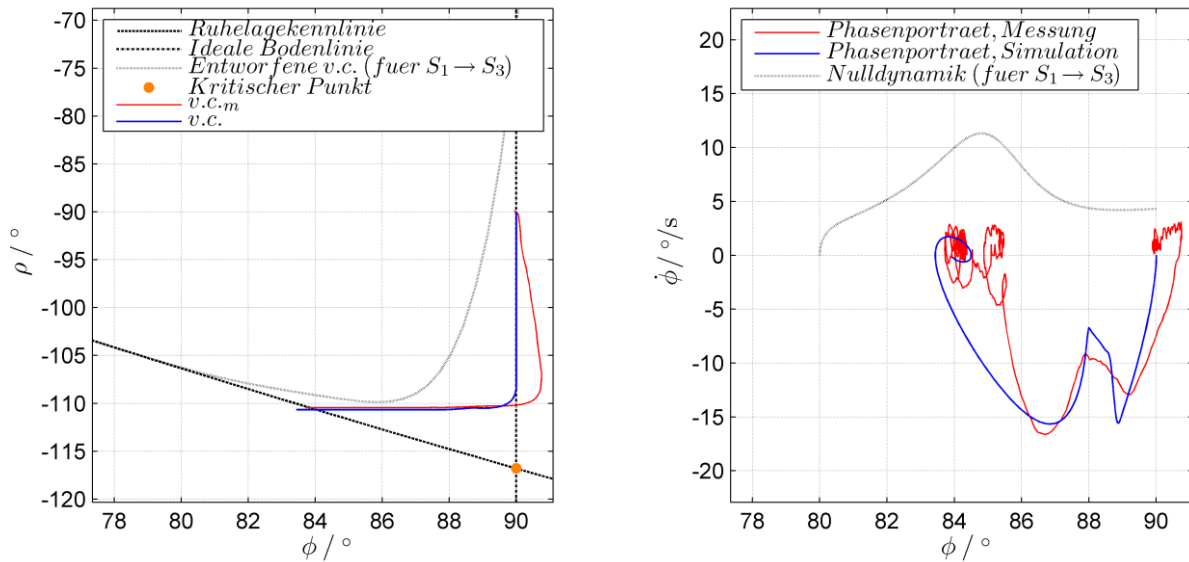


Abb. 6.11: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Umschaltsschwellwert: $\phi = 88^\circ$. Vergleich Simulation und Messung. Induzierte Bindungsfunktion (links) und interne Dynamik (rechts).

Der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ ist stabil, nach dem Abheben zum Zustand S_1 kommt es zu keinen weiteren Bodenkontakten mit den Vorderrädern. Während des Zustandsübergangs treten Positionsänderungen l auf, welche aber ausreichend klein bleiben, um die vorhandene Treppe mit der Auftrittsbreite $D_{st} = 25 \text{ cm}$ problemlos zu steigen und somit die grundlegende Funktionalität zu ermöglichen.

6.2 Treppe

Der Ablauf zum Steigen einer Treppe (im vorhandenen Entwicklungsstand wird das Steigen einer Stufe betrachtet) besteht aus einer Folge folgender Zustände bzw. Zustandsübergänge (Abb. 6.12):

- Ausgangszustand S_3 , alle Räder im Kontakt zum Boden (Abb. 6.12, (a)),
- Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ (Abheben, sodass nur die Hinterräder Bodenkontakt haben durch Verschwinden der Normalkraft λ_4),
- Drehung des Oberkörpers $\dot{\rho} < 0$ im Zustand S_1 zur höheren Stufe (Abb. 6.12, (b)),
- Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ (Absetzen auf der Stufe, Kontakt mit allen Rädern zur Treppe),

- Endzustand S_3 , alle Räder im Kontakt zum Boden mit Vorderrädern auf der höheren Stufe (Abb. 6.12, (c)).

Qualitativ unterscheiden sich die Zustandsübergänge beim Steigen einer Stufe nicht von den Zustandsübergängen am ebenen Boden (Kapitel 6.1).

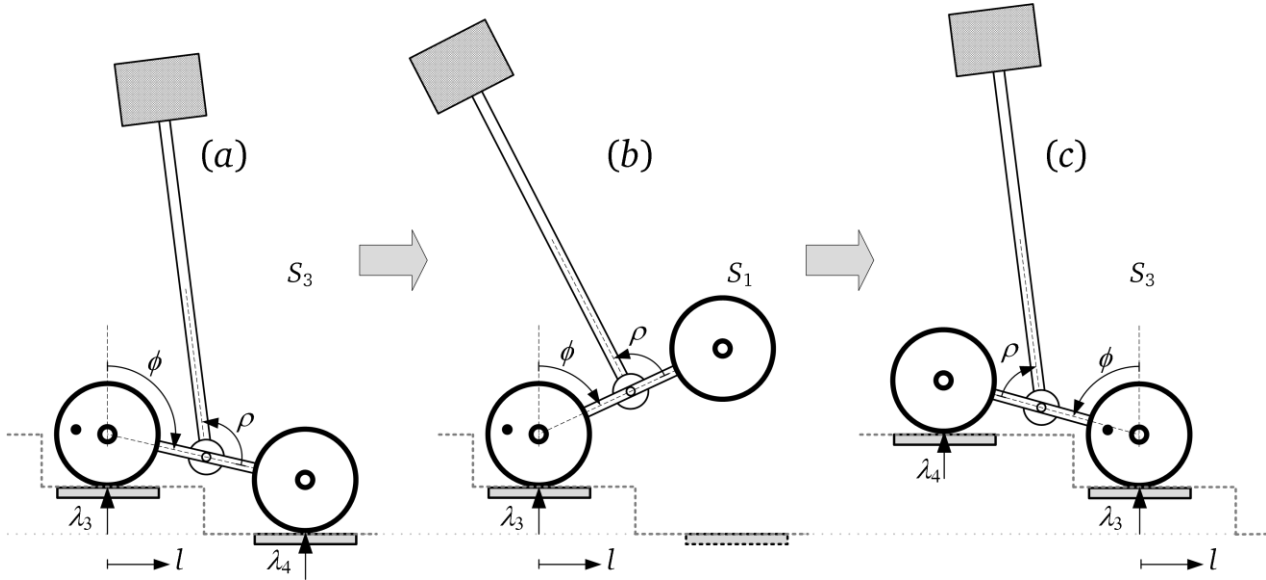


Abb. 6.12: Darstellung unterschiedlicher Situationen des SCD beim Steigen einer Stufe. Die Situation (a) stellt den Anfangszustand im Zustand S_3 dar. In der Situation (b) ist die Drehung des Oberkörpers zur höheren Stufe in S_1 dargestellt und in der Situation (c) der abgesetzte Zustand auf der höheren Stufe S_3 .

Die Unterschiede beziehen sich auf einen anderen Unterkörperwinkel beim Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Nach dem Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ folgt eine Oberkörperdrehung, die prinzipiell wie im Kapitel 6.1.2 verläuft (mit dem Unterschied, dass der Anfangswinkel des Oberkörpers ρ etwas niedriger liegt) und deshalb in diesem Kapitel nicht betrachtet wird. Der letzte Unterschied besteht beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, welcher das Absetzen auf die nächste Stufe beschreibt. Im Gegensatz zum Absetzen auf den Boden (Kapitel 5.7) unterscheidet sich die Drehrichtung des Oberkörperwinkels. In der auftretenden Folge beim Steigen einer Stufe werden hier die Ergebnisse der Zustandsübergänge $S_3 \rightarrow S_1$ und $S_1 \rightarrow S_3$ beschrieben.

6.2.1 Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ auf der Treppe

Dieser Zustandsübergang wurde qualitativ nach dem Prinzip, beschrieben im Kapitel 5.8, realisiert. Bei der realen Stufe ($\delta_{st} = -0.1$ m, Abb. 4.6 und $D_{st} = 0.25$ m, Abb. 3.4) beträgt der Unterkörperwinkel $\phi_0 = \arccos \frac{\delta_{st}}{2L} = 1.911$ rad = 109.5° . Der Anfangspunkt des Oberkörperwinkels $\rho_{s,A} = -110.6^\circ$ wurde aus $\mathcal{H}_{3,0}$ (5.64) und der Endpunkt $\rho_{s,E} = -129.5^\circ$ aus $\mathcal{H}_{1,0}$ (5.63) ausgewählt. Mit diesen Werten verursacht das Fahren der Solltrajektorie (analog zu Abb. 5.21 und $t_E = 0.74$ s) ein Eindringen in den Bereich mit verschwindender Normalkraft der Vorderräder $\lambda_4(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ (analog zu Abb. 5.22). Dabei wird der kritische Punkt umgangen und der Bereich mit verschwindender Normalkraft der Hinterräder $\lambda_3(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) < 0$ nicht berührt.

Der zeitliche Verlauf ist in Abb. 6.13 dargestellt. Qualitativ verläuft der Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ beim Steigen der Stufe wie beim Abheben vom Boden (Kapitel 6.1.4).

Der Verlauf der induzierten virtuellen Bindung, entsprechend Kapitel 5.8 ist in Abb. 6.15 (links) dargestellt. Das daraus entstandene Phasenporträt (Abb. 6.15, rechts) zeigt die Dynamik des Unterkörpers von der Ruhelage am Boden (S_3) durch ein Gebiet ohne Ruhelagepunkte bis hin zur Ruhelage im aufrechten Zustand (S_1).

Quantitative Eigenschaften des realen Regelungssystems aus Abb. 6.13:

- max. dynamische Positionierungsdifferenz: $\max(l_m - l_{d,m}) = 2.8 \text{ cm}$,
min. dynamische Positionierungsdifferenz: $\min(l_m - l_{d,m}) = -6.6 \text{ cm}$,
- max. absolute dynamische Oberkörperwinkeldifferenz: $\max|\rho_{s,m} - \rho_m| = 0.4^\circ$, max. absolute dynamische Oberkörperwinkelgeschwindigkeitsdifferenz: $\max|\dot{\rho}_{s,m} - \dot{\rho}_m| = 4.5^\circ/\text{s}$,
- max. absolute Drehwinkeldifferenz: $\max|\theta_{s,m} - \theta_m| = 1.0^\circ$.

Zum Kommentar der Ergebnisse wird auf Kapitel 6.1.4 hingewiesen.

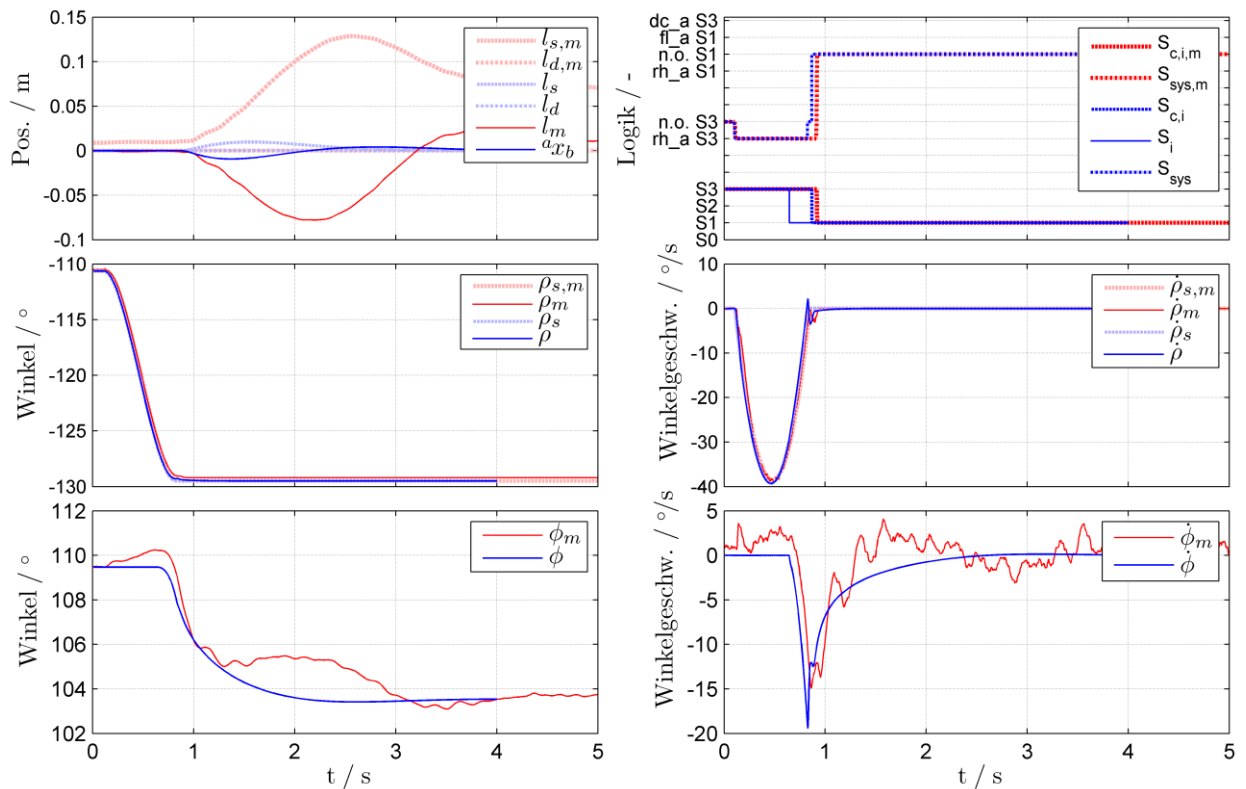


Abb. 6.13: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe. Umschaltenschwellwert: $\phi = 107.5^\circ$. Vergleich Simulation und Messung.

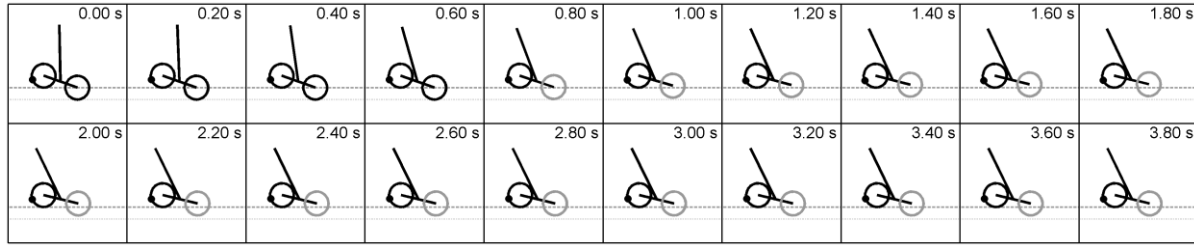


Abb. 6.14: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe. Umschaltswellwert: $\phi = 107.5^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

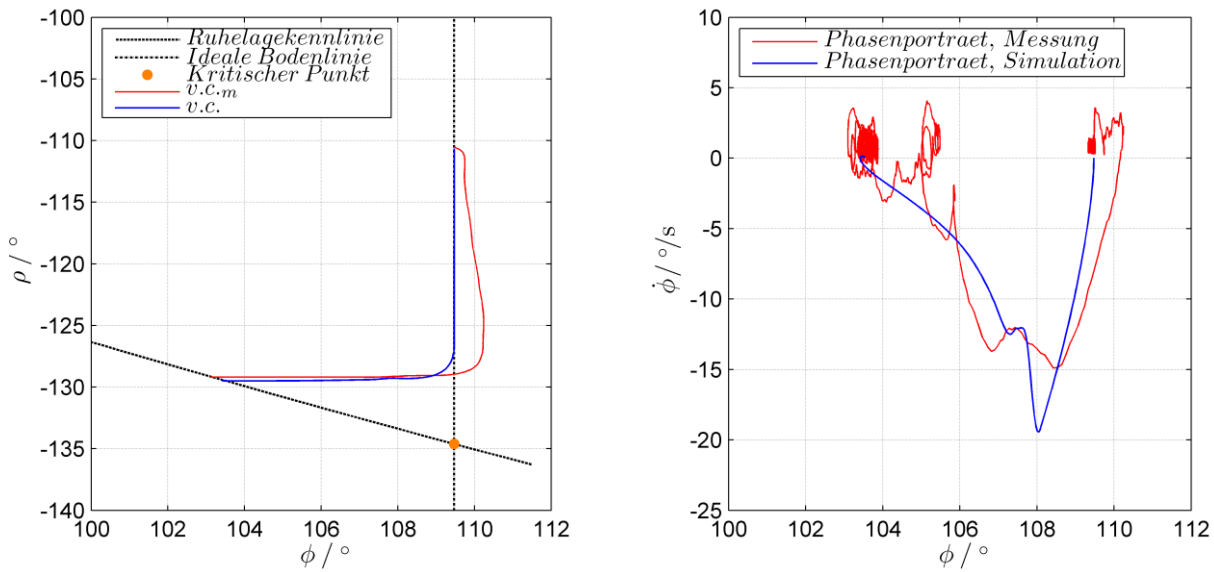


Abb. 6.15: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe. Umschaltswellwert: $\phi = 107.5^\circ$. Vergleich Simulation und Messung. Induzierte Bindungsfunktion (links) und interne Dynamik (rechts).

6.2.2 Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ auf der Treppe

Der Zustandsübergang wurde nach der Beschreibung in Kapitel 5.7 realisiert. Die virtuelle Bindung muss hier neu entworfen werden, um sie an den geänderten Definitionsbereich des Unterkörperwinkels anzupassen. Es wurden die gleichen Wichtungskoeffizienten des Gütefunktional (5.76) wie im Kapitel 5.7 verwendet. Durch den geänderten Definitionsbereich für ϕ (hier $[-70.5, -59]^\circ$) und abweichende Bewegungsrichtung des Oberkörpers ρ ändern sich jedoch die Koeffizienten c_k des Bézier-Polynoms (5.77). Die dadurch erhaltene Bindungsfunktion $y_{S_1,2}(\mathbf{v}_{S_1}) = \rho - f_{1 \rightarrow 3}(\phi)$ ist zusammen mit der Messung und den Simulationsverläufen in Abb. 6.16 (links) dargestellt. Die resultierende Nulldynamik ist in Abb. 6.16 (rechts) dargestellt.

Es werden, wie beim Absetzen auf den Boden (Kapitel 6.1.3), zwei Simulationsverläufe mit unterschiedlichen Bodenhöhen verglichen. Der zeitliche Verlauf mit dem Unterkörperbodenwinkel $\phi = -69.3^\circ$ ist in Abb. 6.17 bzw. Abb. D.19 dargestellt und stimmt besser mit dem realen Verlauf überein, als der zeitliche Verlauf des Simulationsfalles mit dem Unterkörperbodenwinkel $\phi = -70.3^\circ$ (Anhang Abb. D.22 bis Abb. D.24). Diese Unterschiede deuten auf die Ungenauigkeiten des Realsystems hin, gefährden aber nicht die grundlegende Funktionalität des SCD.

Qualitativ verläuft der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ beim Steigen der Stufe wie beim Absetzen zum Boden (Kapitel 6.1.3).

Quantitative Eigenschaften des realen Regelungssystems aus Abb. 6.16 bzw. Abb. 6.17:

- $\max(l_m - l_{d,m}) = 1.0 \text{ cm}$, $\min(l_m - l_{d,m}) = -0.1 \text{ cm}$,
- Oberkörperwinkeldifferenz vor dem Umschalten zum Übergang $S_1 \rightarrow S_3$: $\rho_{s,m} - \rho_m = -0.7^\circ$,
- Unterkörperwinkelfehler der Ruhelage vor dem Umschalten zum Übergang $S_1 \rightarrow S_3$: $f_{1 \rightarrow 3}^{-1}(\rho_m) - \phi_m = -0.20^\circ$,
- Max. Oberkörperwinkelunterschied der idealen virtuellen Bindung gegenüber dem Messwert während des Übergangs $S_1 \rightarrow S_3$: $\max|\rho_{v.c.} - \rho_m| = 9.0^\circ$,
- max. absolute Oberkörperwinkeldifferenz während des Abbremsens in S_3 : $\max|\rho_{s,m} - \rho_m| = 0.3^\circ$, $\max|\dot{\rho}_{s,m} - \dot{\rho}_m| = 6.1^\circ/\text{s}$,
- $\max|\theta_s - \theta| = 0.9^\circ$.
- Zum Kommentar der Ergebnisse wird auf Kapitel 6.1.3 hingewiesen.

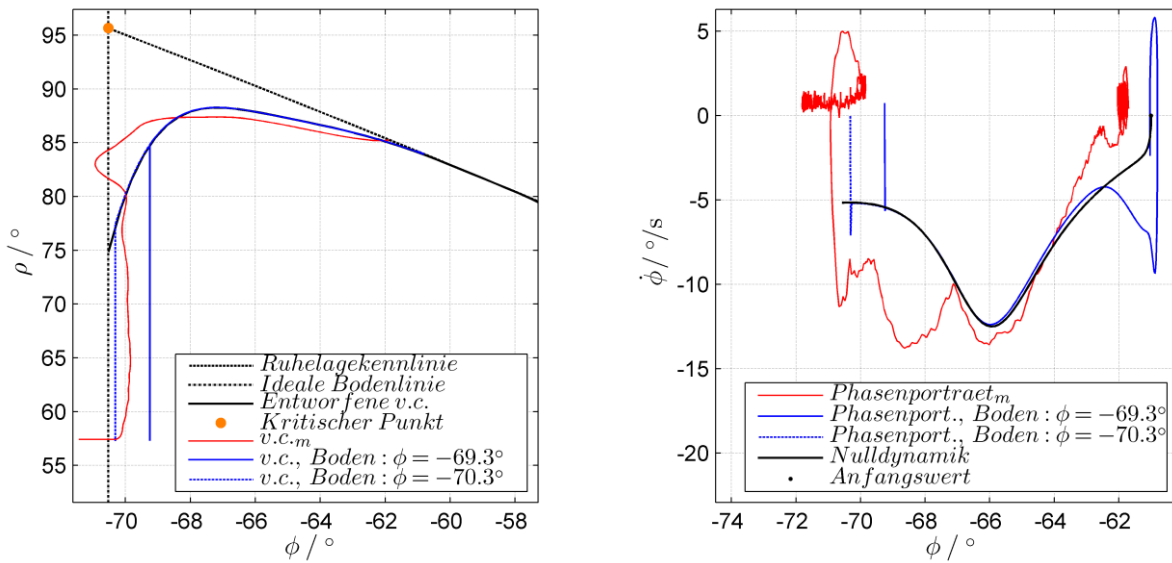


Abb. 6.16: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Vergleich Simulation und Messung. Bindungsfunktion (v.c. = virtual constraint) (links). Phasenporträt der Nulldynamik und interne Dynamik (rechts).

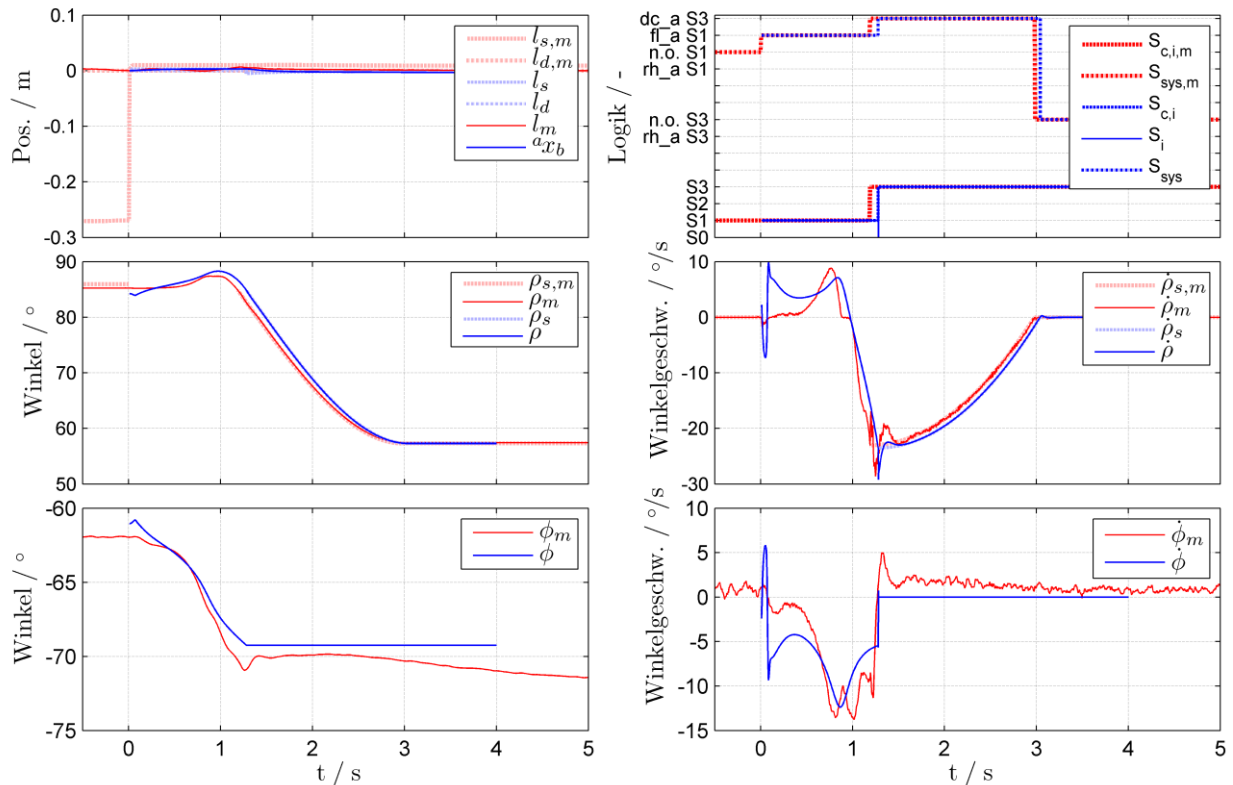


Abb. 6.17: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -69.3^\circ$. Vergleich Simulation vs. Messung.

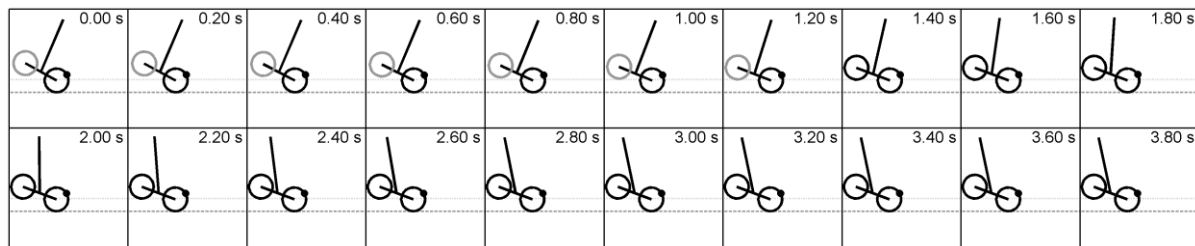


Abb. 6.18: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -69.3^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

6.3 Fazit

Es wurden Messungen des realen SCD und Simulationsergebnisse für Situationen, welche die grundlegende Funktionalität des SCD ermöglichen, um eine Treppe zu steigen, gegenübergestellt. Unterschiede des realen SCD und des Modells treten hauptsächlich aufgrund von *Coulombscher* Reibung auf. Weiterhin treten Abweichungen durch stationäre Ungenauigkeiten, nichtmodellerte Dynamik, Rauschen und Quantisierung auf. Bis auf Abweichungen durch diese Effekte deckt das Modell sowohl in den betrachteten diskreten Zuständen als auch in der zeitkontinuierlichen Dynamik das Verhalten des realen SCD sehr gut ab. Der modellbasierte Reglerentwurf, basierend auf der exakten Linearisierung, zeigt innerhalb der erwähnten Beschränkungen gute Ergebnisse, welche im Realsystem implementiert werden konnten.

In den entworfenen Regelstrategien erfasst die Sensordatenfusion den Unterkörperwinkel mit einer ausreichend hohen Dynamik.

Die Methode der virtuellen Bindung, welche durch eine bestimmte Ausgangsfunktion des durch die exakte Linearisierung beeinflussten Systems hergestellt wird, formt den Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ (Absetzen) nach den geforderten Kriterien. Das Überführen des SCD aus einer Ruhelage im diskreten Zustand S_1 , über einen Bereich ohne Ruhelagen, in die Ruhelage in dem diskreten Zustand S_3 ermöglicht ein sanftes Absetzen mit kleinen Geschwindigkeiten des Unterkörperwinkels $\dot{\phi}$. Durch eine relativ kleine Geschwindigkeit des Unterkörpers $\dot{\phi}$ beim Absetzen ist die Problematik der Elastizität der Stöße vernachlässigbar klein und es konnten plastische Stöße angenommen werden.

Das Abheben des SCD, beim Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ konnte einfacher gestaltet werden, wobei eine gewisse Ähnlichkeit in der Bindung des Unter- und Oberkörperwinkels (ϕ und ρ) bzw. eine Symmetrie im Verlauf der internen Dynamik (ϕ und $\dot{\phi}$) festgestellt wurde.

Beide relevanten diskreten Zustandsübergänge wurden ohne Rückfälle (eindeutig und ohne aufeinander folgende Übergänge) erfolgreich realisiert. Ebenfalls verlaufen die diskreten Zustandsübergänge unmittelbar, d.h. es gibt keine Umwege durch die in der grundlegenden Funktionalität nicht erwünschten Zustände S_0 (kein Kontakt zum Boden) und S_2 (Kontakt nur mit Vorderrädern). Diese Ergebnisse bestätigen die Überlegungen der Bedingungen der Zustandsübergänge aus dem Kapitel 5.6 bis 5.8. Weiterhin weisen die Zustandsübergänge eine gewisse Robustheit gegenüber Ungenauigkeiten und nichtmodellierten Einflüssen beim realen SCD auf und sind somit praxistauglich.

Die zeitkontinuierlichen Verläufe innerhalb eines diskreten Zustands sind mit einer ausreichend hohen Genauigkeit realisiert, damit die grundlegende Funktionalität gewährleistet wird.

Das Treppensteigen, welches die grundlegende Funktionalität des SCD darstellt, wurde erreicht. Gezeigt wurde dies durch Abheben und Absetzen auf einer Stufe. Ein Steigen mehrerer Stufen ist im momentanen Entwicklungsstand mangels Aktoren an den Vorderrädern nicht möglich. Unabhängig davon wurde gezeigt, dass das Steigen einer Treppe als Folge bestimmter diskreter Zustandsübergänge und zeitkontinuierlicher Verläufe realisiert werden kann. Mit zusätzlichen Antrieben an Vorderrädern würde das SCD („nur“ noch) eine Symmetrie bezüglich der Fortbewegung am Treppengang erhalten, sodass sich die Funktion der Räder, die bisher mit den Begriffen „Hinter-“ bzw. „Vorderräder“ bezeichnet sind, nach jedem Bodenkontakt nach Bedarf ändern kann. Somit kann nach dem ersten Absetzen mit den Vorderrädern zur ersten Stufe die Funktion der Vorderräder mit der Funktion der Hinterräder gewechselt werden und ein erneutes Abheben zur nächsten Stufe ausgelöst werden. Es entsteht ein periodischer Zyklus der Bewegung beim Treppensteigen. Regelung und Methodik bleiben dabei unverändert, sie lassen sich direkt auf den Wechsel von Vorder- und Hinterrädern übertragen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine Regelungsstrategie für ein radbasiertes inverses Doppelpendel entwickelt, welches eine Stufe steigen kann. Das radbasierte inverse Doppelpendel ist somit ein radbasiertes treppensteigendes Gerät (SCD). Das Ziel der Arbeit, definiert durch Anforderungen an die grundlegende Funktionalität, wurde vollständig erreicht. Diese sind: stabiles Fahren mit allen vier Rädern im Bodenkontakt (S_3), stabiles Fahren mit Hinterrädern im Bodenkontakt (S_1), selbständiges Abheben vom Boden bzw. von einer Stufe ($S_3 \rightarrow S_1$) und selbständiges Absetzen zum Boden bzw. zu einer Stufe ($S_1 \rightarrow S_3$).

Darüber hinaus wird ein Beitrag zur Behandlung von unteraktuierten, hybriden nichtlinearen Systemen mit einseitigen Bindungen [40] geleistet, wobei insbesondere die Zustandsübergänge eine Herausforderung darstellen. Hier soll der Zustandsübergang des Absetzens ($S_1 \rightarrow S_3$) in den Vordergrund gestellt werden, welcher stabil und mit bestimmten Vorgaben („sanft“ und mit kleinen Positionsamplituden l), durch ein Gebiet ohne vorhandene Ruhelagen verläuft. Dieses basiert auf dem bekannten Konzept der virtuellen Bindungen [71], [5] (ausgeführt mit der partiellen exakten Linearisierung), weist aber durch die spezifische Anwendung trotzdem einen Neuigkeitswert auf.

Modellbildung. Das SCD wurde als ein inverses Doppelpendel unter Berücksichtigung der hybriden Dynamik modelliert. Die zeitkontinuierliche Dynamik wurde für jeden der vier behandelten diskreten Zustände (S_0 – kein Bodenkontakt, S_1 – Hinterräder im Bodenkontakt, S_2 – Vorderräder im Bodenkontakt, S_3 – alle vier Räder im Bodenkontakt) mittels *Lagrange I* Gleichungen hergeleitet. Das dadurch erhaltene Modell ermöglicht Simulationen der Bewegungsabläufe in *Matlab/Simulink*. In der hier behandelten Menge an Kontaktsituationen konnte die Plausibilitätsprüfung der Verläufe problemlos durchgeführt werden. Die Behandlung weiterer Kontaktpunkte würde die Kombinationsmenge der daraus resultierenden Kontaktsituationen erheblich erhöhen, was mit Mehraufwand bei der Plausibilitätsprüfung verbunden ist. Der Entwurf eines robusteren Simulationsverfahrens gegenüber numerischen Fehlern wäre in diesem Fall vorteilhaft. Ein Beispiel für die Behandlung von weiteren Kontaktpunkten (Anzahl der Kontaktsituationen steigt) ist der Radkontakt mit der Setzstufe.

Alternativ kann die Anzahl der Kontaktsituationen klein gehalten werden, indem immer nur die am wahrscheinlichsten auftretenden Fälle behandelt werden (z.B. bei Behandlung des Kontaktes mit der Setzstufe wird angenommen, dass das SCD immer im Kontakt mit der Trittstufe ist).

Es wurden Messungen des realen SCD und Simulationsergebnisse für Situationen, welche die grundlegende Funktionalität des SCD darstellen, gegenübergestellt und dabei eine gute Übereinstimmung festgestellt. Unterschiede des realen SCD und des Modells treten hauptsächlich aufgrund von *Coulombscher* Reibung, aber auch anderen nicht modellierten Einflüssen auf. Der modellbasierte Reglerentwurf, basierend auf der exakten Linearisierung zeigt innerhalb der erwähnten Beschränkungen sehr gute Ergebnisse. Eine noch bessere Übereinstimmung des realen und

entworfenen Verhaltens kann eventuell mit einer geeigneten Kompensation der *Coulombschen* Reibung des Oberkörpers erreicht werden.

Für den Entwurf eines Regelgesetzes in den zwei betrachteten diskreten Zuständen (S_1 und S_3), wurde das Modell weiterhin reduziert und jeweils ein Modell mit einer minimalen Anzahl unabhängiger Koordinaten hergeleitet. Das Regelgesetz betrifft die Regler in den einzelnen Zuständen S_1 und S_3 sowie die Strategien für die Zustandsübergänge $S_3 \rightarrow S_1$ und $S_1 \rightarrow S_3$.

Regelung. Im Zustand S_3 (alle vier Räder im Bodenkontakt) konnte die exakte Linearisierung mit vollem relativem Grad (Eingang-Zustand) durchgeführt werden, was zu einem vollständig linearisierten und entkoppelten System führt. Mit einem zusätzlichen linearen Regler und entsprechender Vorsteuerung konnte das System theoretisch global stabilisiert und ein ideal verlaufendes Führungsverhalten erzielt werden.

Im Zustand S_1 (Hinterräder im Bodenkontakt) handelt es sich im Gegensatz zu Zustand S_3 um ein System mit nicht vollem relativen Grad. Die Anwendung der exakten Linearisierung führt in S_1 zum Aufteilen des Regelungssystems in eine global linearisierte externe Dynamik (Eingang-Ausgang) und eine restliche nichtlineare interne Dynamik, welche die Bewegung des Unterkörpers ϕ bestimmt. Die obere Ruhelage des Systems wurde mit einer Analyse der Nulldynamik als instabil identifiziert, was in Folge zu einem nicht minimalphasigen Verhalten führt. Deshalb wurde zum Erhalt der oberen Ruhelage das gewonnene partiell linearisierte System mit einem zusätzlichen *gain scheduling* LQ-Regler lokal stabilisiert. Mit Anwendung eines leistungsfähigeren Oberkörperantriebs kann ein Regler entworfen werden, der die Störungen durch eine höhere Beteiligung des Oberkörperantriebs zu kleineren Positionsamplituden l führt. Daraus folgend ergibt sich ein Verbesserungspotential, welches allerdings wegen eines größeren Arbeitsbereiches des Oberkörpers wahrscheinlich erst durch inhärent nichtlineare Regelgesetze ausgeschöpft werden kann. Die Aufgabe enthält das Stabilisieren der instabilen Ruhelage eines nicht minimalphasigen nichtlinearen Systems. Außerdem sind die Erhöhung der Robustheit gegenüber nichtmodellierten Einflüssen und die Adaptation auf geänderte Parameter interessant.

Beispielsweise besteht im Rahmen der exakten Linearisierung die Möglichkeit, unter bestimmten Bedingungen den relativen Grad eines nichtlinearen Systems mittels dynamischer Erweiterung (*dynamic extension*, Hinzufügen von Integratoren) zu vervollständigen [49]. Somit führt eine neu entworfene dynamische Rückführung zu einer trivialen Nulldynamik und vollständigen Linearisierung des behandelten Systems.

Der Übergang $S_1 \rightarrow S_3$, das Absetzen zum Boden oder zu einer Stufe, wurde nach gestellten Entwurfskriterien erfolgreich realisiert. Das Überführen des SCD aus einer Ruhelage im Zustand S_1 , über einen Bereich ohne vorhandene Ruhelagen, in die Ruhelage in dem Zustand S_3 ermöglicht ein sanftes Absetzen mit kleinen Geschwindigkeiten des Unterkörperwinkels ϕ und kann als ein lokal stabiler Verlauf im Sinne von *Ljapunov* charakterisiert werden. Die virtuelle Bindung des Ober- und Unterkörpers mittels partieller exakter Linearisierung, bestimmt den Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Die Problematik elastischer Stöße hat sich durch die relativ niedrige Kontaktgeschwindigkeit beim Absetzen als vernachlässigbar klein erwiesen. Daher wurde der Stoß als plastisch beschrieben.

Das Abheben des SCD beim Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ konnte ebenfalls erfolgreich, mit einem entsprechenden Auslösen einer Oberkörperbewegung und Umschalten im Regelgesetz, einfacher als der Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ gestaltet werden. Aufgrund dieser Umschaltung wurde eine Bindung des Unter- und Oberkörperwinkels (ϕ und ρ) hervorgerufen. Daher bietet es sich an, beim Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$ eine ähnliche Strategie wie beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$ zu verwenden. Untersuchenswert wäre eine entsprechende Bindung zu implementieren, wodurch der Übergang $S_3 \rightarrow S_1$ theoretisch konsequenter und möglicherweise mit kleineren Amplitudenausschlägen der Position l verlaufen würde.

Beide Zustandsübergänge verlaufen den Entwurfskriterien entsprechend stabil ohne Rückfälle (eindeutig und ohne aufeinander folgende Übergänge) und mit einer bestimmten Robustheit gegenüber Störungen, nichtmodellierten Einflüssen und Ungenauigkeiten, und sind somit praxistauglich. Eine zusätzliche virtuelle Bindung der SCD-Position l mit dem Unterkörperwinkel ϕ könnte sich als interessant für eine weitere Erhöhung der Robustheit beim Anfang der Zustandsübergänge erweisen.

Eine Erweiterung der Regelstrategie, die sich aus der hybriden Eigenschaft des SCD anbietet, kann zu einer effektiven Störungskompensation und schnellerem Treppensteigen führen. Als Konsequenz einer externen Störung im Zustand S_1 (Balancieren, Hinterräder im Bodenkontakt) wirkt der Regler, sodass mit einer Schwenkung des Unterkörpers und einer Positionsänderung des SCD die Störung kompensiert und die obere Ruhelage erhalten wird. Eine stärkere Störung kann dabei entweder einen Bodenkontakt mit den Vorderrädern oder Kontakt der Hinterräder mit der Setzstufe auslösen. Diese diskreten Ereignisse würden innerhalb des vorhandenen diskreten Zustands als erneute Störungen auftreten. Ein vorrausschauendes hybrides Regelgesetz könnte das Vermeiden der auftretenden Kontakte berücksichtigen und diese durch entsprechende koordinierte Oberkörperbewegung in einer „sanften“ Weise ablaufen lassen. Als Konsequenz dessen müssen Unterkörperdrehungen in neu entstandenen Zuständen hingenommen werden und zwar solange, bis das SCD zum Stillstand kommt. Ob es nach Bewältigung der Störung zu einer Bewegung in die ursprüngliche Position kommt oder nicht, ist eine Entscheidung innerhalb der Regelstrategie. Eine andere Zielsetzung mit einem solchen hybriden Regelgesetz kann ebenfalls zu schnellerem Treppensteigen führen. Aus regelungstechnischer Sicht führt diese Anforderung zum Erzeugen stabiler Grenzyklen.

Zur Anwendung der vorgestellten regelungstechnischen Methodik wird der komplette kontinuierliche Zustandsvektor benötigt, weshalb eine genaue Ermittlung des Unterkörperwinkels mittels Sensordatenfusion zweier Sensoren erfolgreich entworfen wurde. Diese wurde anhand eines Beobachters mit einem vereinfachten und im Arbeitspunkt linearisierten Modell realisiert. Falls in der Weiterentwicklung des SCD Bewegungsabläufe mit einer noch höheren Dynamik und einem noch größeren Arbeitsbereich benötigt werden, kann die eventuell auftretende Diskrepanz mit einem nichtlinearen Beobachter aufgehoben werden.

Sensorik. Mit zusätzlicher Sensorik zur Erfassung der Umgebung kann die Funktionalität erweitert werden. Die Einzelbewegungen, die zum Treppensteigen führen, wurden von außen (vom Bediener) ausgelöst und dem konkreten Abstand zur Stufe angepasst und für eine Stufenhöhe demonstriert. Um eine Anpassung des SCD an unterschiedliche Anfangsabstände und Stufenhöhen zu realisieren, können externe Sensoren zur Ermittlung der Abstände und Treppenkonfiguratio-

nen mit entsprechender Signalverarbeitung implementiert werden. Um die dynamischen Eigenschaften der Signale aus den externen Sensoren zu verbessern, kann eine Sensordatenfusion mit den bereits vorhandenen internen Sensoren angewendet werden. Um den Einfluss der Ungenauigkeiten zu minimieren, wäre ein Abgleich mit den internen Sensoren denkbar. Eine Messung von Radkontaktkräften und Treppenabständen kann zu präziseren und angepassten (in Bezug zur Umgebung des SCD) Zustandsübergängen führen. Dazu ist auch ein adaptives Erzeugen von Bindungsfunktionen in Echtzeit notwendig.

Anwendung. Abschließend wird der Neuigkeitswert dieser Arbeit bezüglich der unterschiedlichen Anwendungsmöglichkeiten kommentiert. Ein selbständiges Treppensteigen mit radbasierten Geräten, die nach dem in dieser Arbeit dargestellten Prinzip funktionieren, ist nach dem Wissen des Autors nicht bekannt. Das Gerät mit der größten Ähnlichkeit, der treppensteigende Rollstuhl *iBOT*, ist beim Treppensteigen nicht selbständig, sondern ist auf manuelle Assistenz des Fahrers oder einer anderen Person angewiesen. Prinzipiell ist die Anwendung des selbständigen Treppensteigens auch auf andere Geräte, die derzeit nach dem Prinzip eines inversen Pendels funktionieren, denkbar. Dadurch kann sich die Mobilität dieser Geräte in den für Menschen geschaffenen Räumen mit Stufen erweitern. Nach Bewältigung sicherheitstechnischer Fragen kann eine Anwendung an treppensteigenden Rollstühlen die Selbständigkeit der Menschen mit Gehbehinderung erheblich erweitern. Darüber hinaus kann die in dieser Arbeit angewendete Methodik auf unteraktuierte hybride nichtlineare Systeme mit einseitigen Bindungen übertragen werden.

8 Literaturverzeichnis

- [1] Michael Liesch. (2012, April) Bundesverband Selbsthilfe Körperbehinderter e.V. [Online]. <http://www.bsk-ev.org/news/1046/tonnenschwere-hindernisse/%29>
- [2] Dan Ding and Rory A. Cooper, "Electric-Powered Wheelchairs - A review of current technology and insight into future directions," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 25, no. April, 2005.
- [3] Karl Johan Åström and Richard M. Murray, *Feedback Systems - An Introduction for Scientists and Engineers*. New Jersey: Princeton University Press, 2008.
- [4] SEGWAY Distributor GmbH. (2012, April) Segway. [Online]. <http://www.segway.de/>
- [5] Eric J. Westervelt, Jessy W. Grizzle, Christine Chevallereau, Jun Ho Choi, and Benjamin Morris, *Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2007.
- [6] Klaus Zimmermann, Igor Zeidis, and Carsten Behn, *Mechanics of Terrestrial Locomotion With a Focus on Non-pedal Motion Systems*. Berlin Heidelberg, Deutschland: Springer-Verlag, 2009.
- [7] L. P. Pook, *Understanding Pendulums - A Brief Introduction*. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer, 2011.
- [8] Bruno Strah, Simon Kern, Torsten Felzer, Rainer Nordmann, and Stephan Rinderknecht, "Mobile Inverse Pendulum Modeling and Control," in *2010 8th IEEE International Conference on Control and Automation*, Xiamen, China, 2010, pp. 1133-1138.
- [9] M. Yamakita, M. Iwashiro, Y. Sugahara, and K. Furuta, "Robust Swing Up Control of Double Pendulum," *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 290-295, June 1995.
- [10] Tasuku Hoshino, Hiroshi Kawai, and Katsuhisa Furuta, "Stabilization of the Triple Spherical Inverted Pendulum - A Simultaneous Design Approach," *Automatisierungstechnik*, pp. 577-587, Dec. 2000.
- [11] Suyang Yu et al., "Configuration and tip-over stability analysis for stair-climbing of a new-style wheelchair robot," in *International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), 2010*, Xi'an, 2010, pp. 1387 - 1392.
- [12] Murray J. Lawn and Takakazu Ishimatsu, "Modeling of a Stair-Climbing Wheelchair Mechanism With High Single-Step Capability," *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, pp. 323-332, Sept. 2003.
- [13] Giuseppe Quaglia, Walter Franco, and Riccardo Oderio, "Wheelchair.q, a mechanical concept for a stair climbing wheelchair," in *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2009*, Guilin, 2009, pp. 800 - 805.
- [14] Independence Technology, Johnson & Johnson Medical Ltd. (2012, April) Information for iBOT Owners. [Online]. <http://www.ibotnow.com/>

- [15] greeneyesvt. (2012, April) Cruising Around in IBOT Balance Mode. [Online].
<http://www.youtube.com/watch?v=PQEN1ideWyA&feature=related>
- [16] Osamu Matsumoto, Shuuji Kajita, Kazuo Tani, and Mitsuhiro Ooto, "A four-wheeled robot to pass over steps by changing running control modes," in *Conference on Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International*, Nagoya, 1995, pp. 1700 - 1706.
- [17] Osamu Matsumoto, Shuuji Kajita, and Kazuo Tani, "Dynamic trajectory control of a variable structure type four-wheeled robot to pass over steps," in *International Workshop on Advanced Motion Control, 1996. AMC '96-MIE. Proceedings., 1996 4th*, Mie, 1996, pp. 253-258.
- [18] Osamu Matsumoto, Shuuji Kajita, and Kazuo Tani, "Fast passing over steps with unknown height by a 'variable structure type four-wheeled robot'," in *Conference on Intelligent Robots and Systems, 1997. IROS '97., Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International*, Grenoble , 1997, pp. 1131-1137.
- [19] Osamu Matsumoto, Shuuji Kajita, Muneharu Saigo, and Kazuo Tani, "Dynamic trajectory control of passing over stairs by a biped type leg-wheeled robot with nominal reference of static gait," in *Conference on Intelligent Robots and Systems, 1998. Proceedings., 1998 IEEE/RSJ International*, Victoria, BC, Canada, 1998, pp. 406-412.
- [20] Osamu Matsumoto, Shuuji Kajita, and Kiyoshi Komoriya, "Flexible locomotion control of a self-contained biped leg-wheeled system," in *Conference on Intelligent Robots and Systems, 2002. IEEE/RSJ International*, Ibaraki, Japan, 2002, pp. 2599-2604.
- [21] Kenji Hashimoto et al., "Realization by Biped Leg-wheeled Robot of Biped Walking and Wheel-driven Locomotion," in *Conference on Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International*, 2005, pp. 2970-2975.
- [22] Bruno Siciliano and Oussama Khatib, *Handbook of Robotics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [23] Arjan van der Schaft and Hans Schumacher, *An introduction to hybrid dynamical systems*. London: Springer-Verlag, 2000.
- [24] Friedrich Pfeiffer and Christoph Glocker, *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [25] Friedrich Pfeiffer, *Mechanical System Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [26] Marion Sobotka, *Hybrid Dynamical System Methods for Legged Robot Locomotion with Variable Ground Contact - Dissertation at TU München.*, 2006.
- [27] Christian Studer and Christoph Glocker, "Simulation of Non-smooth Mechanical Systems with many Unilateral Constraints," in *ENOC-2005*, Eindhoven. Netherlands, 2005, pp. 1597-1606.
- [28] R. Zander et al., "Non-smooth dynamics in academia and industry: recent work at TU München," *Acta Mechanica* 195, pp. 167-183, 2008.
- [29] Vincent Acary and Bernard Brogliato, *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [30] Jan Lunze and Francoise Lamnabhi-Lagarigue, *Handbook of Hybrid Systems Control - Theory, Tools, Applications*. Cambridge CB2 8RU, UK: Cambridge University Press, 2009.

- [31] Alberto Bemporad, Stefano Di Cairano, Ilya Kolmanovsky, and Davor Hrovat, "Hybrid Modeling and Control of a Multibody Magnetic Actuator for Automotive Applications," in *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, 2007, pp. 5270-5275.
- [32] Mohsen Moradi Dalvand and Bijan Shirinzadeh, "Dynamic Modelling, Tracking Control and Simulation Results of a Novel Underactuated Wheeled Manipulator (WAcrobot)," in *Advanced Strategies for Robot Manipulators*. Rijeka, Croatia: Sciyo, 2010, ch. 5, pp. 91-106.
- [33] Mark W. Spong, "The Swing Up Control Problem For The Acrobot," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15, no. 1, pp. 49-55, February 1995.
- [34] Kangsik Lee and Victoria Coverstone-Carroll, "Control Algorithms for Stabilizing Underactuated Robots," *Journal of Robotic Systems*, pp. 681-697, 1998.
- [35] Renaud Ronsse, Philippe Lefevre, and Rodolphe Sepulchre, "Rhythmic Feedback Control of a Blind Planar Juggler," *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 23, No. 4, pp. 790-802, 2007.
- [36] Ricardo G. Sanfelice, Andrew R. Teel, and Rodolphe Sepulchre, "A Hybrid Systems Approach to Trajectory Tracking Control for Juggling Systems," *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5282-5287, 2007.
- [37] Jean Matthieu Bourgeot and Bernard Brogliato, "Tracking Control of Complementarity Lagrangian Systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, pp. 1839-1866, Vol. 15, No. 6 2005.
- [38] E. Guizzo, "When My Avatar Went To Work," *IEEE Spectrum*, pp. 26 - 50, Sept. 2010.
- [39] Tariq Samad and Anuradha Annaswamy, "The Impact of Control Technology," www.ieeecss.org, 2011.
- [40] Mark W. Spong and Masayuki Fujita, "Control in Robotics," in *The Impact of Control Technology*. www.ieeecss.org: IEEE Control Systems Society, 2011, pp. 49-56.
- [41] Werner Schiehlen and Peter Eberhard, *Technische Dynamik*. Wiesbaden: B. G. Teubner Verlag, 2004.
- [42] Karl Popp and Werner Schiehlen, *Ground Vehicle Dynamics*, Springer-Verlag, Ed. Berlin Heidelberg, 2010.
- [43] Rafal Goebel, Ricardo G. Sanfelice, and Andrew R. Teel, "Hybrid Dynamical Systems," *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 28-93, April 2009.
- [44] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1991.
- [45] Zoran Vukić, Ljubomir Kuljača, Dali Đonlagić, and Sejid Tešnjak, *Nonlinear Control Systems*. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [46] Peter Hagedorn, *Non-linear Oscillations*, 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1988.
- [47] Jürgen Adamy, *Nichtlineare Regelungen*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- [48] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 2002.
- [49] Alberto Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995.
- [50] Jan Lunze, *Regelungstechnik 1*, 8th ed. Heidelberg Dordrecht London New York, Deutschland: Springer, 2010.

- [51] Jan Lunze, *Regelungstechnik 2*, 6th ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [52] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, and Giuseppe Oriolo, *Robotics - Modelling, Planning and Control*. London: Springer-Verlag, 2009.
- [53] Christoph Woernle, *Mehrkörpersysteme - Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
- [54] Reza N. Jazar, *Theory of Applied Robotics*, 2nd ed. New York Dordrecht Heidelberg London: Springer-Verlag, 2010.
- [55] Abhinandan Jain, *Robot and Multibody Dynamics - Analysis and Algorithms*. New York Dordrecht Heidelberg London: Springer Science+Business Media, LLC 2011, 2011.
- [56] Walter Greiner, *Classical Mechanics - System of Particles and Hamiltonian Dynamics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [57] Donald T. Greenwood, *Advanced Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [58] Reiner M. Dreizler and Cora S. Lüdde, *Theoretical Mechanics - Theoretical Physics 1*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
- [59] Francis C. Moon, *Applied Dynamics - With Applications to Multibody and Mechatronic Systems*. New York: John Wiles & Sons, Inc., 1998.
- [60] Justin Teo and Jonathan P. How, "Equivalence between Approximate Dynamic Inversion and Proportional-Integral Control," September 2008.
- [61] Otto Föllinger, *Nichtlineare Regelungen II*, 7th ed. München Wien: Oldenbourg Verlag, 1993.
- [62] Karl Johan Åström and Björn Wittenmark, *Computer-Controlled Systems - Theory and Design*, 3rd ed. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1997.
- [63] Michael Santina and Allen R. Stubberud, "Discrete-Time Equivalents of Continuous-Time Systems," in *The Control Handbook - Control System Fundamentals*. Boca Raton, USA: CRC Press, 2011, ch. 12, pp. 12-1 - 12-34.
- [64] Adnan Salihbegović, *Modeling of Dynamic Systems (in Bosnian)*. Sarajevo: Svjetlost, 1985.
- [65] Lennart Ljung and Torkel Glad, *Modeling of Dynamic Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [66] Olav Egeland and Jan Tommy Gravdahl, *Modeling and Simulation for Automatic Control*. Trondheim: Marine Cybernetics AS, 2003.
- [67] Wolf Dieter Pietruszka, *Matlab und Simulink in der Ingenieurpraxis - Modellbildung, Berechnung und Simulation*, 3rd ed. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, 2012.
- [68] The Mathworks, Inc. (2011, September) Simulink User's Guide. pdf document.
- [69] A. T. Fuller, "Conditions for aperiodicity in linear systems," *British Journal on Applied Physics*, pp. 195-198, June 1955.
- [70] Milić R. Stojić, "Analytic Tests for Relative Stability and Strict Aperiodicity," *IEEE Transactions on Education*, vol. Vol. 41, pp. 333-336, November 1998.

-
- [71] Carlos Canudas-de-Wit, "On the concept of virtual constraints as a tool for walking robot control and balancing," *Annual Reviews in Control*, vol. 28, pp. 157-166, 2004.
- [72] Haiyang Zheng, Edward L. Lee, and Aaron D. Ames, "Beyond Zeno: Get on with It!," in *Hybrid Systems: Computation and Control, 9th International Workshop*, Santa Barbara, CA, USA, 2006, pp. 568-582.
- [73] Wilson J. Rugh and Jeff S. Shamma, "Research on gain scheduling," *Automatica*, pp. 1401-1425, 2000.
- [74] Karl Johan Åström and Björn Wittenmark, *Adaptive Control*. Lund: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [75] Rainer Nordmann, *Mechatronische Systeme im Maschinenbau I*, 3rd ed. Aachen, Deutschland: Shaker Verlag, 2005.
- [76] Rainer Nordmann and Herbert Birkhofer, *Maschinenelemente und Mechatronik I*. Aachen: Shaker, 2003.
- [77] Carlos Canudas-de-Wit, Bernard Espiau, and Claudio Urrea, "Orbital Stabilization of Underactuated Mechanical Systems," in *IFAC 15th Triennial World Congress*, Barcelona, 2002.

A Anhang: Technische Daten

A.1 Konstruktion

Während die Massen einzelner Elemente durch Wiegen bestimmt werden können, werden die Trägheitsmomente aus der Konstruktionszeichnung CAD-unterstützt ermittelt.

Trägheitsmomente Unterkörper. Zu dem Unterkörper gehören (Abb. A.1):

- Das Unterteilgerüst, Material: Stahl,
- der Stator des Oberkörpermotors (modelliert als Hohlzylinder mit Außendurchmesser 40 mm und Innendurchmesser 34 mm, Länge 71 mm), Ersatzdichte: 0,48 kg verteilt auf ein Volumen von $8,92 \times 10^{-5} \text{ m}^3$, ergibt 5381 kg/m^3 ,
- der Stator des Getriebes (modelliert als Hohlzylinder mit Außendurchmesser 79 mm und über eine Länge von 17 mm und 63 mm über eine Länge von 29 mm, Innendurchmesser 43 mm), Ersatzdichte: 0,64 kg verteilt auf ein Volumen von $1,74 \times 10^{-4} \text{ m}^3$, ergibt 3678 kg/m^3 .

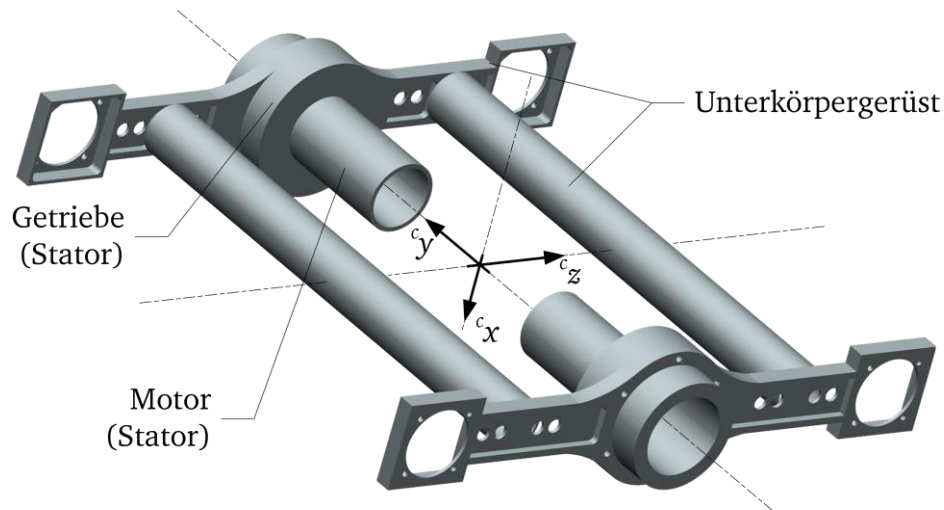


Abb. A.1: CAD-Modell des SCD Unterkörpers.

- Gesamtmasse: $M = 3,311 \text{ kg}$,
- Trägheitsmomente um die Hauptachsen:
 $J_x = 0,06454 \text{ kgm}^2$, $J_y = 0,01404 \text{ kgm}^2$, $J_z = 0,05203 \text{ kgm}^2$,
- Abstand der Radachse zum Massenzentrum des Unterkörpers: $L = 0,15 \text{ m}$.

Trägheitsmomente Unterkörper. Zu dem Unterkörper gehören (Abb. A.2):

- Das Oberkörpergerüst, Profile Hersteller: <http://www.item24.de/>, Größe-Bezeichnung 6, Material: Aluminium,
- Krafteinleitung, Material: Aluminium,
- Verbindungsstück zum Motor, Material: Aluminium,
- Rotor des Oberkörpermotors als Ersatzzylinder mit 43 mm und 46 mm Länge, Ersatzdicke: siehe Oberkörper,
- Rotor des Getriebes als Ersatzzylinder mit 34 mm Durchmesser und 71 mm Länge, Ersatzzylinder: siehe Oberkörper.

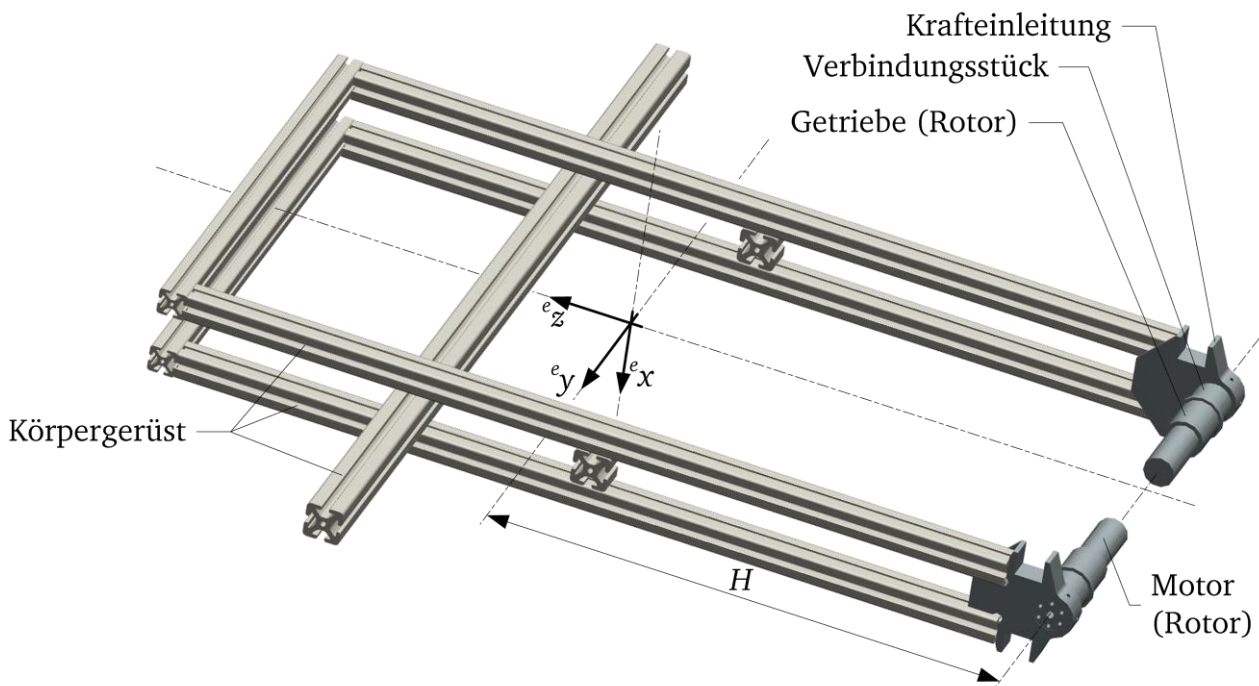


Abb. A.2: CAD-Modell des SCD Oberkörpers.

- Gesamtmasse: $M_B = 11.627 \text{ kg}$,
- Trägheitsmomente um die Hauptachsen:
 $J_{B,x} = 2.01785 \text{ kgm}^2$, $J_{B,y} = 1.4063 \text{ kgm}^2$, $J_{B,z} = 0.631221 \text{ kgm}^2$,
- Abstand der Oberkörperachse bis zum Massenzentrum des Oberkörpers: $H = 0.476 \text{ m}$.

A.2 Aktorik

Radantriebe. Die Radantriebe (Abb. A.3) bestehen aus folgender Antriebseinheit:

- DC-Motor, Hersteller *maxon motor* (<http://www.maxonmotor.com/>), RE 40, Bestellnummer 148867, Erregung: Permanentmagnet, Graphitbürsten. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:
 - Leistung: 150 W,

- Nennspannung: 24 V,
 - Nennstrom: 5.77 A,
 - Nennmoment: 170 mNm,
 - Nenndrehzahl: 6930 min^{-1} ,
 - Drehmomentkonstante: 30.2 mNm/A ,
 - Rotorträgheitsmoment: 138 gcm^2 ,
 - Motorgewicht: 0.48 kg.
- Planetengetriebe, Hersteller *Harmonic Drive* (<http://www.harmonicdrive.de/>), Typ HPG, Baugröße 11A. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:
 - Spielklasse $< 3' \text{ (arc min)}$,
 - Untersetzung: 21,
 - Nenndrehmoment: 3.5 Nm,
 - Massenträgheitsmoment: $0.0045 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$,
 - Masse mit Abtriebswelle: 0.35 kg.
 - Sensor, Hersteller *maxon motor*, inkrementeller Encoder MR Typ L, Bestellnummer 228452. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:
 - Impulszahl pro Umdrehung: 500,
 - Ausgangssignal: TTL kompatibel.

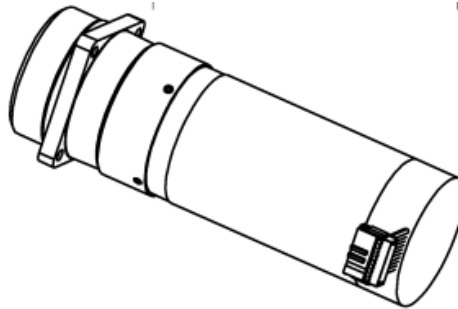


Abb. A.3: Zeichnung des Radantriebes.

Oberkörperantriebe. Die Oberkörperantriebe (Abb. A.4) bestehen aus folgender Antriebseinheit:

- DC-Motor, Hersteller *maxon motor*, RE 40, Bestellnummer 148867, baugleich dem Motor des Radantriebs.
- Gleitkeilgetriebe (*harmonic drive*), Hersteller *Harmonic Drive*, DC-SA HFUC-17-100-2UH. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:
 - Spielfrei,
 - Untersetzung: 100,
 - Nenndrehmoment: 39 Nm, Grenze Kollisionsmoment: 110 Nm
 - Massenträgheitsmoment: $0.079 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$,
 - Gewicht: 0.64 kg.

- Sensor, Hersteller *maxon motor*, inkrementeller Encoder MR Typ L, Bestellnummer 228452, baugleich dem Sensor vom Radantrieb,
- Bremse, Hersteller *maxon motor*, AB 28. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:
 - Nennspannung 24 V,
 - Bremsmoment statisch bei 20°C: > 0.4 Nm.

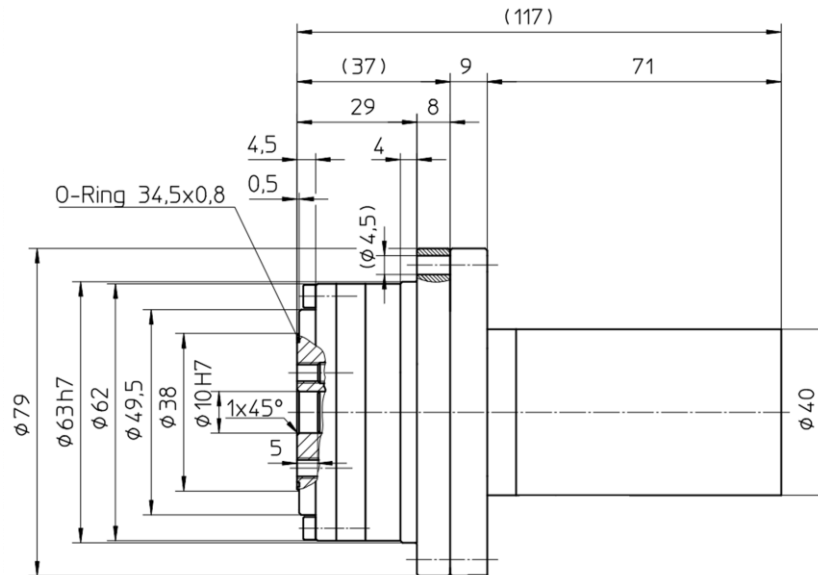


Abb. A.4: Zeichnung des Oberkörperantriebes (Herstellerzeichnung).

Dämpfung der Oberkörperschwingungen. Beide Oberkörperantriebe (links und rechts) werden synchron zwischen dem Unterkörper und Oberkörper des SCD betrieben. Das zu stellende, vom Regler berechnete Antriebsmoment wird gleich aufgeteilt, auf die linke und rechte Antriebseinheit des Oberkörpers aufgetragen (Abb. A.5). Unter Starrkörperbetrachtung des SCD können die auftretenden Antriebs- und Lastmomente auf der linken und rechten Seite des Unterkörpers bzw. Oberkörpers addiert werden. Tatsächlich ist die Konstruktion des Oberkörpers aber elastisch und deutlich elastischer als die Konstruktion des Unterkörpers. Im realen System konnten gegenphasige Schwingungen (≈ 11 Hz) der linken und rechten Seite des Oberkörpers um die y -Achse (Abb. 4.2) beobachtet werden. Diese unerwünschten Schwingungen sind zwar bemerkbar in der Messung, deren Amplitude ist jedoch akzeptabel für die Funktionalität des SCD. Zudem konnten diese Schwingungen mit einer dämpfenden Komponente (Parameter D_p) des aufschaltenden elektrischen Moments gemindert werden (Abb. A.5). Es wird die Differenz der Geschwindigkeiten der linken und rechten Seite mit einem durch Tests ermittelten Proportionalfaktor beaufschlagt und zu den Sollgrößen der Ströme $i_{s,body,l}$ und $i_{s,body,r}$ mit unterschiedlichen Vorzeichen addiert. Dadurch entsteht eine aktive dämpfende Wirkung, die die erwähnte gegenphasige Schwingungsform mindert und keinen Einfluss auf den restlichen Teil der Dynamik des SCD hat. Letztendlich können die linke und rechte Antriebseinheit des Oberkörpers in eine virtuelle Oberkörperantriebseinheit zusammengefasst werden. Diese ist bei der Modellierung im Kapitel 4.1.4 beschrieben und bedarf keiner weiteren Behandlung.

Als Information des Oberkörperwinkels gegenüber dem Unterkörper ρ wird dementsprechend der Mittelwert der linken ρ_l und rechten ρ_r Seite des Oberkörpers benutzt.

Das Umdrehen des Vorzeichens in Abb. A.5 ist durch die geometrische Anordnung der beiden Oberkörperantriebe gegenüber dem SCD-Oberkörper bedingt.

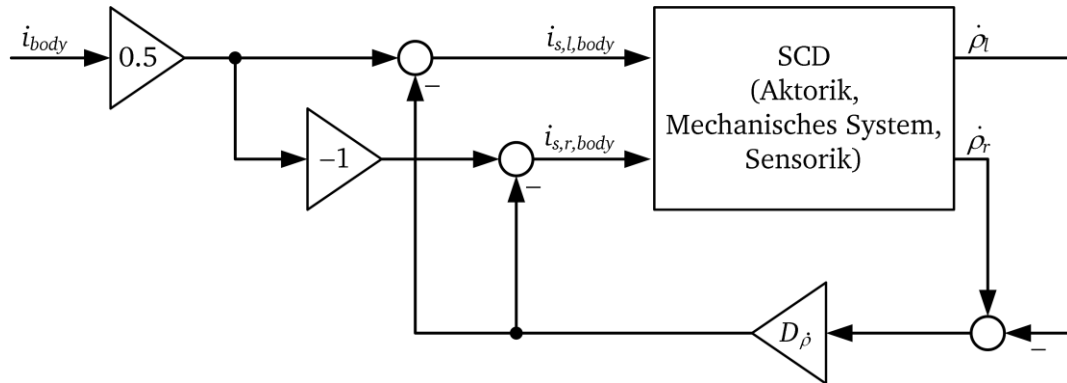


Abb. A.5: Blockschaltbild der implementierten Dämpfung D_ρ der gegenphasigen Schwingungen der Oberkörperkonstruktion. Zu den Oberkörpersollstromgrößen wird eine Oberkörpergeschwindigkeitsdifferenzabhängige Dämpfungsgröße addiert.

Leistungselektronikeinheit. Hersteller *maxon motor*, ADS 50/5, Bestellnummer 145391. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:

- 4-Quadrantenbetrieb,
- PWM-Verstärker, Taktfrequenz 50 kHz, Wirkungsgrad bis 95%, Schutz gegen Überstrom, Übertemperatur und Kurzschluss,
- Eingangsspannungsbereich 12-50 VDC,
- Max. Ausgangsstrom 10 A, dauernd 5 A,
- Bandbreite des Stromreglers 2.5 kHz.

Reibung – Radantriebe. In Abb. A.6 sind die messtechnisch, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, ermittelten Reibungswerte in stationären Geschwindigkeitspunkten aufgetragen.

Die Parameter der Reibung wurden aus der Ausgleichsgerade bestimmt:

- Coulombsche Reibung $B_{c,wh} = 0.212 \text{ Nm}$,
- Parameter viskoser Reibung $B_{v,wh} = 0.0173 \text{ Nm/rad/s}$.

Reibung – Oberkörperantriebe. In dem Diagramm Abb. A.7 sind die Reibungswerte aus dem Datenblatt des Gleitkeilgetriebes für zwei unterschiedliche Temperaturwerte eingetragen. In Abb. A.7 sind Messungen in stationären Geschwindigkeitspunkten beschrieben nach Methode im Kapitel 3.3, eingetragen.

Die Parameter der Reibung wurden aus der Ausgleichsgeraden bestimmt:

- Coulombsche Reibung $B_{c,bd} = 2.41 \text{ Nm}$ (Herstellerangabe lastfreies Rückdrehmoment: 3.3 Nm),
- Parameter viskoser Reibung $B_{v,bd} = 3.53 \text{ Nm/rad/s}$.

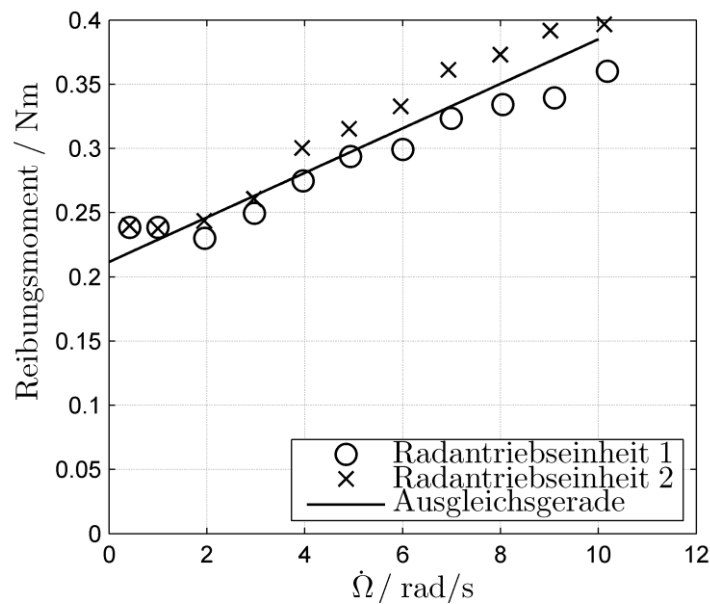


Abb. A.6: Messungen der Reibungsmomente der Radantriebseinheiten.

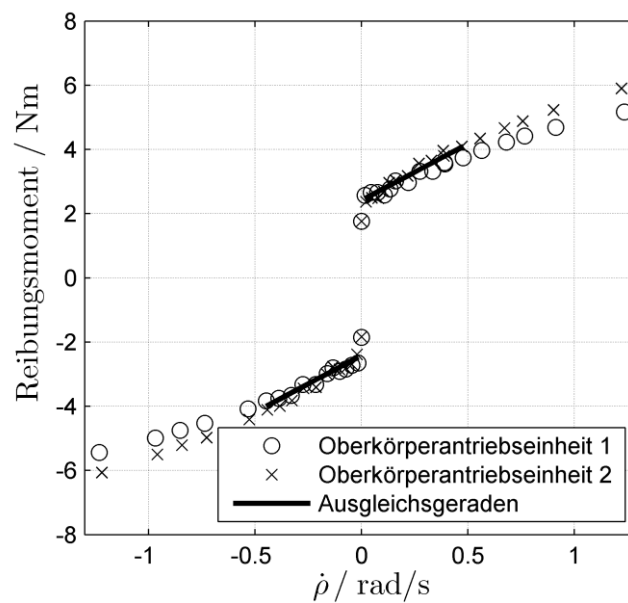


Abb. A.7: Messungen der Reibungsmomente der Oberkörperantriebe.

A.3 Sensorik

Drehzahlsensoren. Die Drehzahlsensoren sind ein Bestandteil der Antriebseinheiten. Die Sensoren sind als inkrementelle Encoder an der Motorwelle angebracht und deren Daten sind im Kapitel A.2 gegeben.

Gyroskop. Das Gyroskop oder Drehratensensor, Hersteller: *Analog Devices*, ADXRS401. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:

- Messbereich: $\pm 75^\circ/\text{s}$,
- Empfindlichkeit: $15 \text{ mV}/^\circ/\text{s}$,
- Frequenzbereich: bis 40 Hz,
- Null-Wert: 2.5 V,
- Spannungsversorgung: 5 V,
- Ausgangsspannung: $\approx 0.25 \text{ V}$ bis 4.75 V ,
- Nullverschiebung: Mittelwert über Population $\approx 2 \text{ mV}/^\circ\text{C}$.

Um den dSPACE A/D-Eingangsbereich von $\pm 10 \text{ V}$ und damit auch die volle Auflösung auszunutzen, wurde der Ausgangsbereich vom Gyroskop mittels Addition einer Referenzspannung von -2.5 V und eines Verstärkungsfaktors von 3.73 (realisiert mit einem Operationsverstärker) auf den Bereich von $\pm 9.3 \text{ V}$ erweitert.

Inklinometer. Das Inklinometer oder der Neigungssensor, Hersteller: *disynet*, IS1A45P20. Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt:

- Messbereich: $\pm 45^\circ$,
- Auflösung: 0.05° ,
- Kalibrierte Genauigkeit: $\pm 0.5^\circ$,
- Nichtlinearität: 0.3° ,
- Spannungsversorgung: 15 bis 30 VDC,
- Spannungsausgang: 0 bis 10 V,
- Grenzfrequenz: 18 Hz.

A.4 Hardware und Software zur Regelung/Steuerung

Hardware. Die Hardware besteht aus dem dSPACE *controller board* DS1103 PPC-07, die durch die Erweiterungsbox PX4 mit einem PC verbunden ist.

- Die wichtigsten Daten aus dem Datenblatt der DS1103 PPC-07:
 - Prozessor: PowerPC, PPC604e, CPU Clock 400 MHz, Bus Frequenz 66 MHz,
 - Speicher: 2 MB lokaler Speicher (für Applikation), 128 MB globaler Speicher (für Datenspeicherung und Austausch mit dem Host),
 - ADC: 16 mehrfache Kanäle (4 Kanäle pro 1 sample & hold Glied), Auflösung 16 bit, Eingang: $\pm 10 \text{ V}$, Umwandlungszeit: $1 \mu\text{s}$,
 - ADC: 4 Einzelkanäle (1 Kanal pro 1 sample & hold Glied), Auflösung 12 bit, Eingang: $\pm 10 \text{ V}$, Umwandlungszeit: $0.8 \mu\text{s}$,
 - DAC: 8 Kanäle, Auflösung 14 bit, Ausgang: $\pm 10 \text{ V}$, Einstellzeit: $5 \mu\text{s}$ (12 bit),
 - digitale Eingänge 32 bit gruppiert in 8 bit Gruppen, SW-programmierbar zu Ein- oder Ausgang, TTL,

- digitale inkrementelle Encoder Eingänge: 6 unabhängige Kanäle, Position Zähler Eingangsfrequenz 1.65 MHz
- sonstige Elemente, Eigenschaften und Möglichkeiten...
- Die wichtigsten Daten des verwendeten PC:
 - Motherboard: ASUS P8H67-M EVO,
 - Prozessor: Intel i5-2500K, CPU @3.3 GHz,
 - Speicher: 3 GB RAM.

Software. Die Software für den Regler-Algorithmus läuft auf dem dSPACE *controller board* DS1103. Diese wird aus dem am PC entworfenen *Matlab/Simulink/Stateflow* Kode kompiliert und in das DS1103 runtergeladen. Eine Software auf dem PC, *ControlDesk Next Generation*, ermöglicht das Einsehen der gemessenen und zu bearbeitenden Daten in (fast) Echtzeit und speichern am PC.

- PC, Betriebssystem: Windows XP Professional + Service Pack 3, 32 bit Version,
- *Matlab* Version: 7.12 (2011a), *Simulink* Version: 7.7, *Stateflow* Version: 7.7,
- dSPACE Version: 7.1.

A.5 Sonstige Elemente

Einige Elemente, die ein Bestandteil des SCD Prüfstands sind und eine in der Realität praktisch nützliche Funktion erfüllen sind in diesem Unterkapitel erwähnt.

- Spannungsversorgung des SCD ist durch zwei Netzgeräte vom Typ EA-PS 524-11-R gewährleistet (Ausgangsspannung max. 29 V, Leistung 300 W). Ein hochkapazitiver Kondensator dient als Energiepuffer während der Generatorbetriebsphase der Antriebe am SCD.
- Der NOT-AUS Schalter dient bei Betätigung mit Unterbrechung der Spannungsversorgung als Schutzmaßnahme gegen Beschädigung beim Auftreten nichtvorhergesehener Situationen beim Testen.
- Die Schutzkonstruktion, sichtbar in Abb. 3.1, verhindert den Absturz des SCD-Oberkörpers auf den Boden im Fall unvorhergesehener Situationen beim Testen.

B Anhang: Grundlagen und Modellbildung

B.1 Integrierbarkeit der Bindungen

Die Integrierbarkeit der i -ten nichtholonomen Bindung ist gegeben, wenn

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial j \partial k} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial k \partial j}, \quad j, k \in \{1, \dots, n\} \text{ der abhängigen Koordinate.} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Beispiel: *Rad am Boden*

B.2.1 Fall mit holonomen Bindungen: *Rad am Boden in einer Ebene*

Ein Beispiel für ein System mit holonomen Bindungen ist ein Rad, das sich in einem 2D-Raum, in der ${}^b x$ - ${}^b z$ Ebene in Abb. B.1 bewegt.

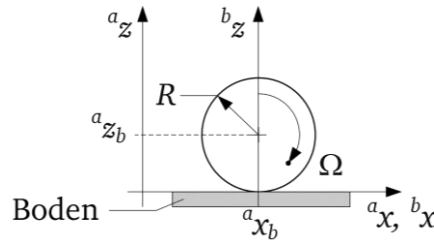


Abb. B.1: Rad am Boden während einer Rollbewegung in der ${}^a x$ - ${}^a z$ Ebene (Ansicht).

Das Koordinatensystem K_a ist raumfest und das Koordinatensystem K_b körperfest. Als variable Koordinaten bleiben daher ${}^a x_b$, ${}^a z_b$ und Ω übrig. Weiterhin werden die restlichen Bewegungsmöglichkeiten betrachtet. Die Bindung zum Boden ist gegeben durch

$$\Phi_1({}^a z_b) = {}^a z_b - R = 0. \quad (\text{B.2})$$

Das Abrollen des Rades, bzw. die longitudinale Bewegung ohne durchzurutschen, ist mit einer weiteren holonomen Bindung beschrieben

$$\Phi_2({}^a x_b, \alpha) = {}^a x_b - R\Omega = 0. \quad (\text{B.3})$$

Die Anzahl der holonomen Bindungen beträgt somit $m_{hol} = 2$. Die Beschreibung der Kinematik des im 2D-Raum bewegten Rades ist somit von ursprünglich drei, $n = 3$, *abhängigen Koordinaten* ${}^a x_b$, ${}^a z_b$ und Ω , gegeben mit dem Vektor der abhängigen Koordinaten

$$\mathbf{q} = [{}^a x_b \quad {}^a z_b \quad \Omega]^T, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.4})$$

auf nur eine *unabhängige Koordinate*, $n - m_{hol} = 1$, geschrumpft: $\Omega \oplus {}^a x_b$, je nach Bedarf. Hier ist der Vektor der unabhängigen Koordinaten \mathbf{v} für die Entscheidung zu ${}^a x_b$ gegeben

$$\mathbf{v} = [{}^a x_b]^T, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-m_{hol}}. \quad (\text{B.5})$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade der Lage $d_{fp} = n - m_{hol} = 1$ ist gleich der Anzahl der unabhängigen Koordinaten.

Zusammengefasst kann die Bindungsmatrix $\Phi(\mathbf{q})$ nach Form (2.13) beschrieben werden:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^a x_b - R\Omega \\ {}^a z_b - R \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.6})$$

Durch zeitliches Ableiten können diese Bindungen in der Geschwindigkeitsform und weiterhin in der Beschleunigungsform dargestellt werden. Als Beispiel werden die Bindungen $\Phi_1({}^a z_b)$ und $\Phi_2({}^a x_b, \Omega)$ in der Geschwindigkeitsform berechnet

$$\dot{\Phi}_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial {}^a z_b} {}^a \dot{z}_b = {}^a \dot{z}_b = 0, \quad (\text{B.7})$$

bzw.

$$\dot{\Phi}_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial {}^a x_b} {}^a \dot{x}_b + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \Omega} \dot{\Omega} = {}^a \dot{x}_b - R\dot{\Omega} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Zusammengefasst können die kinematischen Bindungen als zeitliche Ableitung $\dot{\Phi}(\mathbf{q})$ unmittelbar nach (2.14) beschrieben werden:

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^a \dot{x}_b \\ {}^a \dot{z}_b \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.9})$$

Bei der Betrachtung der Geschwindigkeiten kommen keine neuen Bindungen hinzu. Die Anzahl der *Freiheitsgrade der Geschwindigkeiten* d_{fv} ist gleich der Freiheitgrade der Lage $d_{fp} = d_{fp}$.

In den Betrachtungen (2.15), (B.4), (B.5) und (B.9) lautet für das vorhandene Beispiel die Matrix \mathbf{J}_v :

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \overline{R} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Es kann geprüft werden, dass die Beziehung (2.16) gilt $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_v = \mathbf{0}$.

B.2.2 Fall mit nichtholonomen Bindungen: *Rad am Boden im 2D-Raum*

Ein typisches Beispiel des Systems mit nichtholonomen Bindungen stellt ein Rad dar, das sich ohne durchzurutschen, am Boden im 2D-Raum aufgespannt durch die ${}^a x$ - ${}^a y$ Ebene bewegt Abb. B.2.

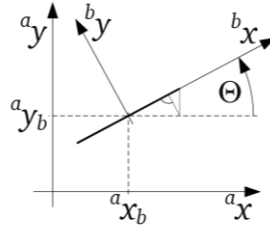


Abb. B.2: Rad am Boden während einer Rollbewegung im 2D-Raum, aufgespannt durch die ${}^a x$ - ${}^a y$ Ebene (Draufsicht). Auch die Drehung des Rades um die eigene ${}^b z$ -Hochachse Θ wird betrachtet.

Im Gegensatz zu dem Beispiel des Kapitels B.2.1 werden zunächst die Drehung des Rades um die ${}^b z$ -Achse um den Winkel Θ und die Bewegung entlang der ${}^b y$ -Achse betrachtet. In der weiteren Betrachtung wird die Fortbewegung des Rades durch die Beziehung $d^a y_b / d^a x_b = \tan \Theta$ in der lateralen Richtung behindert. Zunächst werden die Geschwindigkeiten des Rades in die longitudinale v_{long} bzw. laterale v_{lat} Richtung zum Ausdruck gebracht

$$v_{long} = {}^a \dot{x}_b \cos \Theta + {}^a \dot{y}_b \sin \Theta, \quad v_{lat} = {}^a \dot{x}_b \sin \Theta - {}^a \dot{y}_b \cos \Theta \quad (B.11)$$

Die holonome Bindung $\Phi_1({}^a z_b)$ (B.2) ist für diesen Fall weiterhin gültig. Die Bindung Φ_2 (B.3) ist für diesen Fall nicht mehr richtig. Die Rollbewegung in longitudinaler Richtung, ist in diesem Fall nur in der differentiellen Form analytisch beschreibbar. Die longitudinale Geschwindigkeit v_{long} ist gleich der Winkelgeschwindigkeit des Rades

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_3 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial {}^a x_b} {}^a \dot{x}_b + \frac{\partial \Phi_3}{\partial {}^a y_b} {}^a \dot{y}_b + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \Omega} \dot{\Omega} = \\ &= \cos \Theta {}^a \dot{x}_b + \sin \Theta {}^a \dot{y}_b - R \dot{\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (B.12)$$

Die Prüfung der Integrierbarkeit (B.1) ergibt, dass es sich um eine nichtholonome Bindung handelt.

Eine weitere Bindung $\Phi_4({}^a x_b, {}^a y_b, \Theta)$ beschreibt die Sperrung einer lateralen Bewegung durch Stellen der lateralen Geschwindigkeit v_{lat} zu Null. Diese Bindung existiert analytisch ebenfalls nur in einer Geschwindigkeitsform

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_4 &= \frac{\partial \Phi_4}{\partial {}^a x_b} {}^a \dot{x}_b + \frac{\partial \Phi_4}{\partial {}^a y_b} {}^a \dot{y}_b + \frac{\partial \Phi_4}{\partial \Theta} \dot{\Theta} = \\ &= \sin \Theta {}^a \dot{x}_b - \cos \Theta {}^a \dot{y}_b = 0. \end{aligned} \quad (B.13)$$

Die Prüfung der Integrierbarkeit (B.1) ergibt, dass es sich um eine nichtholonome Bindung handelt.

Die abhängigen Koordinaten ($n = 5$) können in der Geschwindigkeitsebene im Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ zusammengefasst werden

$$\dot{\mathbf{q}} = [{}^a\dot{x}_b \quad {}^a\dot{y}_b \quad {}^a\dot{z}_b \quad \dot{\Omega} \quad \dot{\Theta}]^T, \quad \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.14})$$

die kinematischen Bindungen können mit Einbeziehen der einzelnen Bindungen (B.7), (B.12) und (B.13) in $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ $\dot{\mathbf{q}}$ zusammengefasst werden. Die kinematische Bindungsmatrix ist dabei

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & -R & 0 \\ \sin \Theta & -\cos \Theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

Für das weitere Vorgehen wird in den Gleichungen (B.11) die longitudinale Geschwindigkeit $v_{long} = \dot{l}$ neu bezeichnet. Danach können die Geschwindigkeiten in ${}^a x_b$ - bzw. ${}^a y_b$ -Richtung anhand der longitudinalen Geschwindigkeit ermittelt werden

$${}^a\dot{x}_b = \dot{l} \cos \Theta, \quad {}^a\dot{y}_b = \dot{l} \sin \Theta. \quad (\text{B.16})$$

Die longitudinale Geschwindigkeit \dot{l} kann als eine alternative Koordinate zu ${}^a\dot{x}_b$ bzw. ${}^a\dot{y}_b$ betrachtet werden.

Das Rad kann jede beliebige Position und Orientierung in der ${}^a x$ - ${}^a y$ Ebene erreichen. Daher ist die Anzahl der Freiheitsgrade der Lage, entsprechend den Koordinaten ${}^a x_b$, ${}^a y_b$, Ω und Θ , $d_{fp} = n - m_{hol} = 4$. Die Trajektorie ist aber beschränkt im Ablauf in die longitudinale Richtung. Daher sind die Geschwindigkeiten ${}^a\dot{x}_b$, ${}^a\dot{y}_b$, $\dot{\Omega}$ und $\dot{\Theta}$ trotzdem nicht unabhängig. Die Anzahl der holonomen und nichtholonomen Bindungen Φ_1 , Φ_3 , und Φ_4 beträgt $m = m_{hol} + m_{nhol} = 3$. Da diese Bindungen zusammenfassend hier nur in der differenziellen Form dargestellt werden können, wird die Beschreibung der Kinematik in den Geschwindigkeiten betrachtet. Die Beschreibung der Kinematik des im 2D-Raum bewegten Rades ist somit von ursprünglich fünf, $n = 5$, abhängigen Koordinaten ${}^a\dot{x}_b$, ${}^a\dot{y}_b$, ${}^a\dot{z}_b$, $\dot{\Omega}$ und $\dot{\Theta}$ auf nur zwei, $d_{fv} = n - m = 2$, unabhängige Koordinaten geschrumpft $\dot{\Theta} \wedge ({}^a\dot{x}_b \oplus {}^a\dot{y}_b \oplus \dot{\Omega} \oplus \dot{l})$. Hier ist der Vektor der unabhängigen Koordinaten $\dot{\mathbf{v}}$ für die Entscheidung zu \dot{l} und $\dot{\Theta}$ gegeben

$$\dot{\mathbf{v}} = [\dot{l} \quad \dot{\Theta}]^T, \quad \dot{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n-m}. \quad (\text{B.17})$$

Die Trajektorie ist im Ablauf nur auf eine longitudinale Richtung beschränkt. Eine laterale Bewegungsrichtung ist nicht möglich. Es reicht also, wenn die Drehgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ und die longitudinale Geschwindigkeit \dot{l} bekannt sind. Alle anderen Geschwindigkeiten können dann mittels der Transformationsmatrix $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$ und entsprechender Gleichung (2.15) bestimmt werden

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 \\ \sin \Theta & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Die Positionen l und Θ können allerdings nur durch numerische Integration ermittelt werden.

Erneut gilt die Beziehung entsprechend Gleichung (2.16), $\Phi_q(q) J_v = 0$.

B.3 Beispiel: *Springender Ball*

Kontaktkonfigurationen. Der springende Ball (*Bouncing Ball*) ist ein oft erwähntes Beispiel für ein System, das sowohl zeitkontinuierliche als auch diskontinuierliche Dynamik beinhaltet. Aus Beobachtung ist kenntlich, dass der Ball einen Kontaktpunkt zum Boden hat, $n_c = 1$. Daraus entstehen zwei diskrete Zustände:

- S_0 , der Ball befindet sich im freien Fall und
- S_1 , der Ball befindet sich im Kontakt mit dem Boden.

Die Anzahl der diskreten Zustände ist zwei und es gibt eine Kontaktkonfiguration.

Hybride Dynamik. Für die beiden diskreten Zustände S_0 (freier Fall) und S_1 (Kontakt mit dem Boden) wird die zeitkontinuierliche Dynamik dargestellt nach der Form (2.30) (für eine Masse des Balles 1 kg):

- S_0 , auf den Ball wirkt die Schwerkraft, $\ddot{q} = -g$, $\lambda = 0$ und
- S_1 , auf den Ball wirkt die Schwerkraft und die Kontaktkraft, $\ddot{q} = -g + \lambda$. Da die Kontaktkraft gleich der Schwerkraft ist $\lambda = g$, bewegt sich der Ball in diesem Zustand nicht $\ddot{q} = 0$.

In diesem einfachen Beispiel ist die Distanz zum Boden g_N gleich der Position q des Balles $g_N = q$. Die Stoßbedingung ist mit der Funktion $J_{A,S_1} := q = 0 \wedge \dot{q} < 0$, die Geschwindigkeit nach dem Newtons Stoß mittels der $\dot{q}_E := -\epsilon \dot{q}_A$ und der entsprechende Kraftstoß mit $\Lambda = \dot{q}_E - \dot{q}_A = -(1 + \epsilon)\dot{q}_A$ bestimmt.

Die hybride Dynamik wird in einem hybriden Zustandsautomaten dargestellt nach Vorbild aus [72] mit der Erweiterung um die *Guard*-Funktion $G_{1 \rightarrow 0}$ (Abb. B.3), welche später kommentiert wird. Es wird angenommen, dass der Ball am Anfang eine Position $q(0) > 0$ hat, weshalb das Geschehen immer im S_0 beginnt. Durch den Einfluss der Gravitation fällt der Ball zum Boden und nach der Bedingung J_{A,S_1} kommt es zu einem Stoß, wobei die abprallende Geschwindigkeit \dot{q}_E anhand der *Reset*-Funktion $R_{0 \rightarrow 0} := \dot{q}_E = -\epsilon \dot{q}_A$ bestimmt wird. Nach dem Stoß und einer positiven Geschwindigkeit $J_{E,S_1} := \dot{q}_E > 0$ befindet sich der Ball erneut im S_0 , was durch die *Guard*-Funktion $G_{0 \rightarrow 0} = J_{A,S_1} \wedge J_{E,S_1}$ ermöglicht wird. Erneut wiederholt sich das Fallen mit dem Stoß, wobei sich die abprallende Geschwindigkeit \dot{q}_E immer mehr mindert. Käme es zu der Geschwindigkeit Null beim Erreichen des Bodens, $C_{A,S_1} := \dot{q}_E = 0$, dann beruhigte sich der Ball im Kontakt zum Boden, und durch $G_{0 \rightarrow 1} = J_{A,S_1} \wedge C_{A,S_1}$ käme es zum Übergang zu S_1 . Allerdings kann es mit dem vorhandenen Modell nie zu einer Geschwindigkeit Null kommen [30]. Die Geschwindigkeit mindert sich zwar ständig und die Zeit zum Aufprallen kürzt sich ständig, theoretisch kommt es aber mit unendlich vielen diskreten Ereignissen nie zum Stillstand.

Eine Simulation mit Anfangswerten $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 0$ und der Stoßzahl $\epsilon = 0.8$ ist in Abb. B.4 dargestellt.

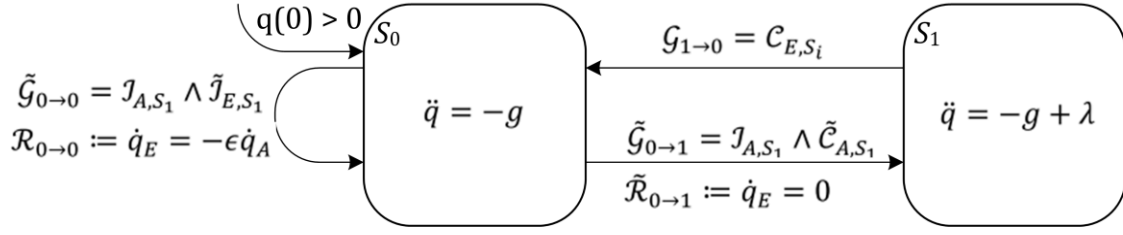


Abb. B.3: Hybrider Zustandsautomat für das Beispiel des springenden Balles.

Wenn man anhand der Ballkinematik alle Aufprallzeitpunkte zusammenaddiert, stellt man fest mit Anwendung der entsprechenden *Taylorreihe*⁴⁵, dass die Summe zum Akkumulierungszeitpunkt $t_{Accu} = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = 4.0637$ s konvergiert. Das Phänomen eines dynamischen Systems mit unendlich vielen Ereignissen in einem endlichen Zeitintervall ist unter dem Namen *Zeno-Verhalten* bekannt [30]. Nach dem in Abb. B.3 betrachteten Modell wäre eine Simulation aus dem benannten Grund nicht praktikabel. Deshalb werden die Bedingungen der Geschwindigkeit geändert [67], [72]:

- bei der Stoßbedingung zu $\tilde{J}_{E,S_1} := \dot{q}_E > \varepsilon_{\dot{q}}$, was weiter bei der *Guard*-Funktion zu $\tilde{G}_{0 \rightarrow 0} = J_{A,S_1} \wedge \tilde{J}_{E,S_1}$ führt bzw.
- bei der Kontaktaufnahme zu $\tilde{C}_{A,S_1} := \dot{q}_E \leq \varepsilon_{\dot{q}}$ und $\tilde{G}_{0 \rightarrow 1} = J_{A,S_1} \wedge \tilde{C}_{A,S_1}$. Ebenfalls muss hier die *Reset*-Funktion $\tilde{R}_{0 \rightarrow 1}$, welche im idealen Fall ausgelassen wurde, jetzt geändert werden, indem die Geschwindigkeit zu Null gesetzt wird, $\tilde{R}_{0 \rightarrow 1} := \dot{q}_E = 0$, weil $\tilde{G}_{0 \rightarrow 1}$ bereits bei $\dot{q}_E \neq 0$ den Übergang ermöglicht.

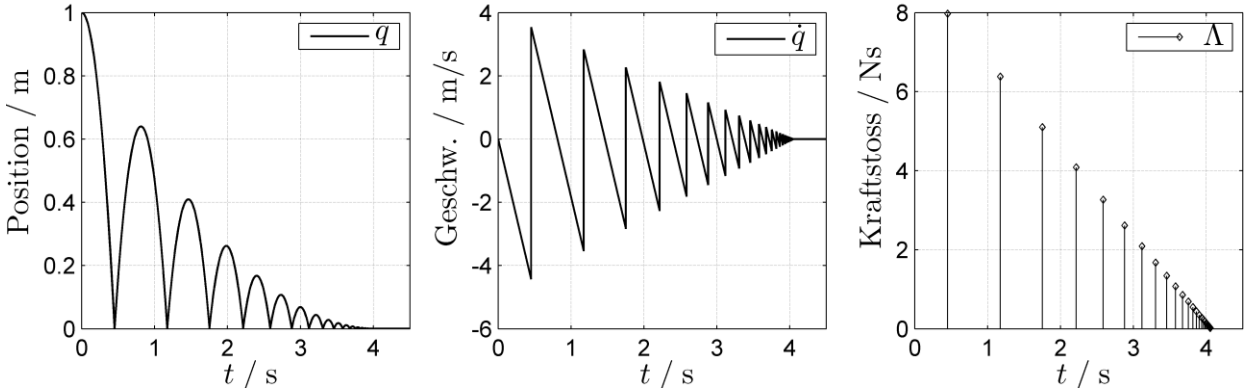


Abb. B.4: Simulation eines springenden Balles mit Anfangswerten $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 0$ und der Stoßzahl $\epsilon = 0.8$.

Dabei stellt $\varepsilon_{\dot{q}} \in \mathbb{R}^+$ eine kleine Geschwindigkeitsschwelle dar, ab der eine Kontaktaufnahme auftritt. Mit diesen Änderungen und dem Wert $\varepsilon_{\dot{q}} = 0.01$ m/s wurden die Simulationsergebnisse in Abb. B.4 erzielt.

⁴⁵ $\frac{1}{1-\epsilon} = 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n$, für $|\epsilon| < 1$

Abschließend wird noch der Übergang $S_1 \rightarrow S_0$ betrachtet (Abb. B.3), welcher das Auflösen des Kontakts darstellt. Dieser kommt mit einer verschwindenden Normalkraft zustande $\mathcal{C}_{E,S_i} := \lambda = 0 \wedge \dot{\lambda} = 0$, $\mathcal{G}_{1 \rightarrow 0} = \mathcal{C}_{E,S_i}$. Dies ist zwar in dem hier betrachteten Fall nie erfüllt, vollständigshalber ist dieser Fall jedoch berücksichtigt.

B.4 Beispiel: *Stab mit Doppelkontakt*

Kontaktkonfigurationen. Hier wird ein starrer Stab betrachtet [24], der unter Einfluss der Gravitation an zwei Kontakten anstoßen kann, Abb. B.5, $n_c = 2$. Daraus entstehen vier diskrete Zustände:

- S_0 , der Stab befindet sich im freien Fall,
- S_1 , der Stab befindet sich im aktiven Kontakt mit dem Kontaktpunkt 1,
- S_2 , der Stab befindet sich im aktiven Kontakt mit dem Kontaktpunkt 2,
- S_3 , der Stab befindet sich im aktiven Kontakt mit dem Kontaktpunkt 1 und dem Kontaktpunkt 2.

Es gibt also vier diskrete Zustände und drei mögliche Kontaktkonfigurationen.

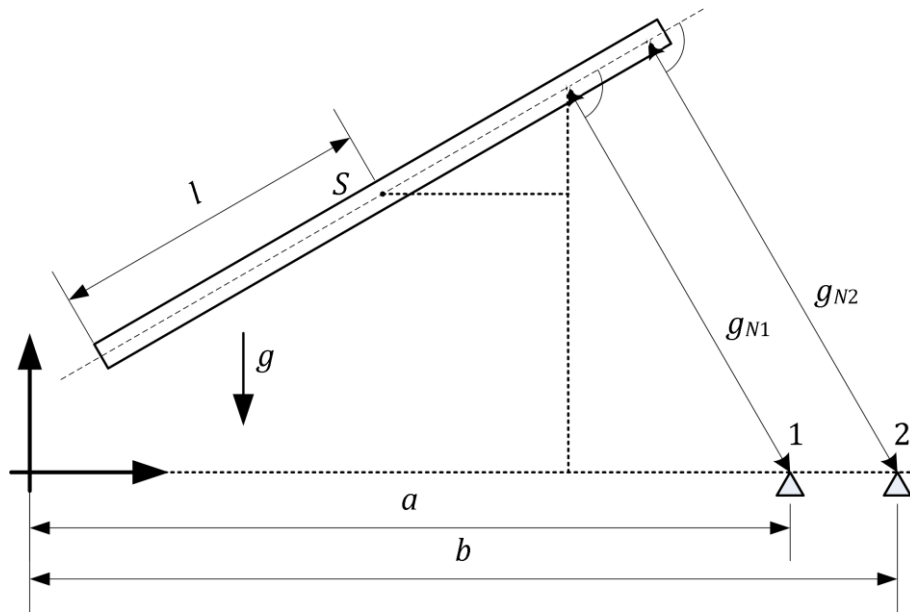


Abb. B.5: Starrer Stab mit Doppelkontakt. Die zwei Kontaktpunkte sind bezeichnet mit 1 und 2.

Mehrfache Kontakte. In [24] wird gezeigt, dass im Fall $-l \leq a \leq 0$ und $b = l$ (Abb. B.6, links), wenn der Schwerpunkt S des Stabes beim Entstehen des Kontaktes zwischen den beiden Kontaktpunkten 1 und 2 liegt, die dazugehörigen Kraftstöße Λ_{N1} und Λ_{N2} stets positiv sind: $\Lambda_{N1} \geq 0$ und $\Lambda_{N2} \geq 0$.

In einem zweiten Fall $0 < a < l$ und $b = l$ (Abb. B.6, rechts), wenn sich der Schwerpunkt des Stabes beim Aufprall nicht zwischen den beiden Kontaktpunkten befindet, wird bei der Bewertung

der Kontaktstöße nach der Gleichung (2.52) festgestellt, dass $\Lambda_{N,1} \geq 0$ und $\Lambda_{N,2} \leq 0$. Der Kraftstoß $\Lambda_{N,2}$ kann also negative Werte ergeben. Dies ist physikalisch falsch und deutet darauf hin, dass der Kontaktpunkt 2 überflüssig ist. In diesem Fall muss dieser Kontaktpunkt aus der Berechnung ausgeschlossen werden und die Berechnung (2.52) nur mit dem Kontaktpunkt 1 erneut durchgeführt werden.

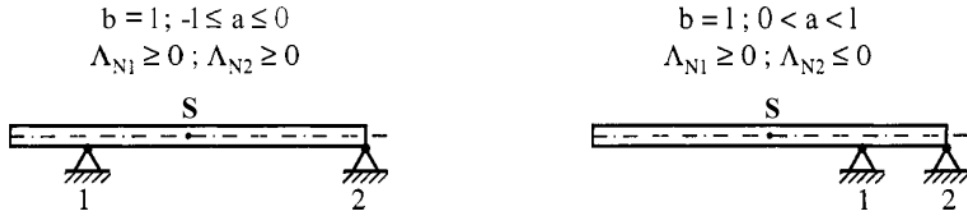


Abb. B.6: Unterschiedliche Fälle beim Aufprall des Stabes auf zwei Kontaktpunkte [24].

B.5 Geometrie

$${}^a\mathbf{T}_c = {}^a\mathbf{T}_b {}^b\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \cos(\Theta)\cos(\phi) & -\sin(\Theta) & \cos(\Theta)\sin(\phi) & {}^ax_b + L\cos(\Theta)\sin(\phi) \\ \sin(\Theta)\cos(\phi) & \cos(\Theta) & \sin(\Theta)\sin(\phi) & {}^ay_b + L\sin(\Theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & {}^az_b + L\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} {}^a\mathbf{T}_d &= {}^a\mathbf{T}_b {}^b\mathbf{T}_d = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\Theta)\cos(\phi) & -\sin(\Theta) & \cos(\Theta)\sin(\phi) & {}^ax_b + 2L\cos(\Theta)\sin(\phi) \\ \sin(\Theta)\cos(\phi) & \cos(\Theta) & \sin(\Theta)\sin(\phi) & {}^ay_b + 2L\sin(\Theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & {}^az_b + 2L\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} {}^a\mathbf{T}_e &= {}^a\mathbf{T}_c {}^c\mathbf{T}_e = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\Theta)\cos(\rho + \phi) & -\sin(\Theta) & \cos(\Theta)\sin(\rho + \phi) & {}^ax_b + \cos(\Theta)(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) \\ \sin(\Theta)\cos(\rho + \phi) & \cos(\Theta) & \sin(\Theta)\sin(\rho + \phi) & {}^ay_b + \sin(\Theta)(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) \\ -\sin(\rho + \phi) & 0 & \cos(\rho + \phi) & {}^az_b + H\cos(\rho + \phi) + L\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

B.6 Kinematik

Die Translationsgeschwindigkeiten im K_b :

$${}^a\dot{\mathbf{r}}_b = \begin{bmatrix} {}^a\dot{x}_b \\ {}^a\dot{y}_b \\ {}^a\dot{z}_b \end{bmatrix}, \quad {}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,b} = \begin{bmatrix} {}^a\dot{x}_b - B_w\dot{\Theta}\cos(\Theta) \\ {}^a\dot{y}_b - B_w\dot{\Theta}\sin(\Theta) \\ {}^a\dot{z}_b \end{bmatrix}, \quad {}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,b} = \begin{bmatrix} {}^a\dot{x}_b + B_w\dot{\Theta}\cos(\Theta) \\ {}^a\dot{y}_b + B_w\dot{\Theta}\sin(\Theta) \\ {}^a\dot{z}_b \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Die Translationsgeschwindigkeiten im K_c :

$${}^a\dot{\mathbf{r}}_c = \begin{bmatrix} {}^a\dot{x}_b - L\dot{\Theta}\sin(\Theta)\sin(\phi) + L\dot{\phi}\cos(\Theta)\cos(\phi) \\ {}^a\dot{y}_b + L\dot{\phi}\sin(\Theta)\cos(\phi) + L\dot{\Theta}\cos(\Theta)\sin(\phi) \\ {}^a\dot{z}_b - L\dot{\phi}\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Die Translationsgeschwindigkeiten im K_d :

$${}^a\dot{\mathbf{r}}_{l,d} = \begin{bmatrix} {}^a\dot{x}_b - \dot{\Theta}B_w\cos(\Theta) - 2L\dot{\Theta}\sin(\Theta)\sin(\phi) + 2L\dot{\phi}\cos(\Theta)\cos(\phi) \\ {}^a\dot{y}_b - \dot{\Theta}B_w\sin(\Theta) + 2L\dot{\phi}\sin(\Theta)\cos(\phi) + 2L\dot{\Theta}\cos(\Theta)\sin(\phi) \\ {}^a\dot{z}_b - 2L\dot{\phi}\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$${}^a\dot{\mathbf{r}}_{r,d} = \begin{bmatrix} {}^a\dot{x}_b + \dot{\Theta}B_w\cos(\Theta) - 2L\dot{\Theta}\sin(\Theta)\sin(\phi) + 2L\dot{\phi}\cos(\Theta)\cos(\phi) \\ {}^a\dot{y}_b + \dot{\Theta}B_w\sin(\Theta) + 2L\dot{\phi}\sin(\Theta)\cos(\phi) + 2L\dot{\Theta}\cos(\Theta)\sin(\phi) \\ {}^a\dot{z}_b - 2L\dot{\phi}\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

Die Translationsgeschwindigkeiten im K_e :

$${}^a\dot{\mathbf{r}}_e = \begin{bmatrix} {}^a\dot{x}_b - \dot{\Theta}\sin(\Theta)(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) + \cos(\Theta)(H(\dot{\rho} + \dot{\phi})\cos(\rho + \phi) + L\dot{\phi}\cos(\phi)) \\ {}^a\dot{y}_b + \sin(\Theta)(H(\dot{\rho} + \dot{\phi})\cos(\rho + \phi) + L\dot{\phi}\cos(\phi)) + \dot{\Theta}\cos(\Theta)(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) \\ {}^a\dot{z}_b - H(\dot{\rho} + \dot{\phi})\sin(\rho + \phi) - L\dot{\phi}\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

B.7 Modell der Dynamik

Elemente der Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_q(\mathbf{q})$, (4.48):

$$H_{q,11} = M_B + 2m_{wb} + 2m_{wd} + M \quad (\text{B.27})$$

$$H_{q,41} = \frac{R\sin(\Theta)(M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) + L\sin(\phi)(4m_{wd} + M))}{2B_w} \quad (\text{B.28})$$

$$H_{q,61} = \cos(\Theta)(M_B(H\cos(\rho + \phi) + L\cos(\phi)) + L\cos(\phi)(4m_{wd} + M)) \quad (\text{B.29})$$

$$H_{q,71} = HM_B \cos(\rho + \phi) \cos(\Theta) \quad (\text{B.30})$$

$$H_{q,42} = -\frac{R\cos(\Theta)(M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) + L\sin(\phi)(4m_{wd} + M))}{2B_w} \quad (\text{B.31})$$

$$H_{\mathbf{q},62} = -\sin(\Theta)(M_B(H\cos(\rho + \phi) + L\cos(\phi)) + L\cos(\phi)(4m_{wd} + M)) \quad (\text{B.32})$$

$$H_{\mathbf{q},72} = HM_B\cos(\rho + \phi)\sin(\Theta) \quad (\text{B.33})$$

$$H_{\mathbf{q},63} = -M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) - L\sin(\phi)(4m_{wd} + M) \quad (\text{B.34})$$

$$H_{\mathbf{q},73} = -HM_B\sin(\rho + \phi) \quad (\text{B.35})$$

$$H_{\mathbf{q},44} = \frac{R^2}{4B_w^2} \left(\sin^2(\rho + \phi)J_{B,x} + \cos^2(\rho + \phi)J_{B,z} + M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi))^2 + \right. \\ \left. J_x\sin^2(\phi) + J_z\cos^2(\phi) + 8L^2m_{wd}\sin^2(\phi) + L^2M\sin^2(\phi) \right) + \frac{1}{2}(2J_w + R^2(m_{wb} + m_{wd})) \quad (\text{B.36})$$

$$H_{\mathbf{q},54} = -\frac{R^2}{4B_w^2} (\sin^2(\rho + \phi)J_{B,x} + \cos^2(\rho + \phi)J_{B,z} + M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi))^2 + \\ 2B_w^2(m_{wb} + m_{wd}) + J_x\sin^2(\phi) + J_z\cos^2(\phi) + 8L^2m_{wd}\sin^2(\phi) + L^2M\sin^2(\phi)) \quad (\text{B.37})$$

$$H_{\mathbf{q},64} = J_w \quad (\text{B.38})$$

$$H_{\mathbf{q},66} = J_{B,y} + M_B(H^2 + 2HL\cos(\rho) + L^2) + 2J_w + J_y + 8L^2m_{wd} + L^2M \quad (\text{B.39})$$

$$H_{\mathbf{q},76} = J_{B,y} + HM_B(H + L\cos(\rho)) \quad (\text{B.40})$$

$$H_{\mathbf{q},77} = J_{B,y} + H^2M_B \quad (\text{B.41})$$

Elemente der Zentrifugal- und Coriolis- Matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, (4.49):

$$C_{\mathbf{q},1} = -\frac{1}{4B_w^2} \left(4B_w^2\dot{\Theta}^2 \cos(\Theta) (M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) + L\sin(\phi)(4m_{wd} + M)) + \right. \\ 4B_w^2 \cos(\Theta) \left(HM_B(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \sin(\rho) \cos(\phi) + HM_B(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \cos(\rho) \sin(\phi) + \right. \\ \left. L\dot{\phi}^2 \sin(\phi) (M_B + 4m_{wd} + M) \right) + 8B_w^2\dot{\Theta} \sin(\Theta) (M_B(H(\dot{\rho} + \dot{\phi}) \cos(\rho + \phi) + L\dot{\phi} \cos(\phi)) + \\ \left. L\dot{\phi} \cos(\phi) (4m_{wd} + M)) \right) \quad (\text{B.42})$$

$$C_{\mathbf{q},2} = -\frac{1}{4B_w^2} \left(\sin(\Theta) \left(4B_w^2\dot{\Theta}^2 (M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi)) + L\sin(\phi)(4m_{wd} + M)) + \right. \right. \\ 4B_w^2 \left(HM_B(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \sin(\rho) \cos(\phi) + HM_B(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \cos(\rho) \sin(\phi) + L\dot{\phi}^2 \sin(\phi) (M_B + \right. \\ \left. 4m_{wd} + M) \right) \left. \right) - 8B_w^2\dot{\Theta} \cos(\Theta) (M_B(H(\dot{\rho} + \dot{\phi}) \cos(\rho + \phi) + L\dot{\phi} \cos(\phi)) + \\ \left. L\dot{\phi} \cos(\phi) (4m_{wd} + M)) \right) \quad (\text{B.43})$$

$$C_{\mathbf{q},3} = HM_B(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \sin(\rho) \sin(\phi) - HM_B(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \cos(\rho) \cos(\phi) - L\dot{\phi}^2 \cos(\phi) (M_B + 4m_{wd} + M) \quad (\text{B.44})$$

$$C_{\mathbf{q},4} = \dot{\Theta}^2 \left((\dot{\rho} + \dot{\phi}) \sin(2(\rho + \phi)) (J_{B,x} - J_{B,z}) + 2M_B(H\sin(\rho + \phi) + L\sin(\phi))(H(\dot{\rho} + \dot{\phi}) \cos(\rho + \phi) + L\dot{\phi} \cos(\phi)) + \right. \\ \left. \dot{\phi} \sin(2\phi) (J_x - J_z + L^2(8m_{wd} + M)) \right) \quad (\text{B.45})$$

$$C_{q_6} = -\frac{1}{8B_w^2} (4B_w^2 \dot{\theta}^2 (\sin(2(\rho + \phi)) J_{B,x} - \sin(2(\rho + \phi)) J_{B,z} + H^2 M_B \sin(2(\rho + \phi)) + 2HLM_B \sin(\rho + 2\phi) + L^2 M_B \sin(2\phi) + J_x \sin(2\phi) - J_z \sin(2\phi) + 8L^2 m_{wd} \sin(2\phi) + L^2 M \sin(2\phi)) + 8HL\dot{\rho} M_B B_w^2 (\dot{\rho} + 2\dot{\phi}) \sin(\rho)) \quad (B.46)$$

$$C_{q_7} = HL\dot{\phi}^2 M_B \sin(\rho) - \cos(\rho + \phi) \dot{\theta}^2 (\sin(\rho + \phi) (J_{B,x} - J_{B,z}) + HM_B (H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi))) \quad (B.47)$$

Elemente der Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_{v_{s_1}}(v_{s_1})$, (4.66):

$$H_{v_{s_1},11} = \frac{2J_m i_{G,wh}^2}{R^2} + M_B + \frac{2J_w}{R^2} + 2m_{wb} + 2m_{wd} + M \quad (B.48)$$

$$H_{v_{s_1},12}(\phi, \rho) = -\frac{2J_m i_{G,wh}^2}{R} + M_B (H \cos(\rho + \phi) + L \cos(\phi)) + 4Lm_{wd} \cos(\phi) + LM \cos(\phi) \quad (B.49)$$

$$H_{v_{s_1},13}(\phi, \rho) = HM_B \cos(\rho + \phi) \quad (B.50)$$

$$H_{v_{s_1},22}(\rho) = J_{B,y} + 2J_m i_{G,wh}^2 + H^2 M_B + 2HLM_B \cos(\rho) + L^2 M_B + J_y + 8L^2 m_{wd} + L^2 M \quad (B.51)$$

$$H_{v_{s_1},23}(\rho) = J_{B,y} + HM_B (H + L \cos(\rho)) \quad (B.52)$$

$$H_{v_{s_1},33} = J_{B,y} + 2J_m i_{G,bd}^2 + H^2 M_B \quad (B.53)$$

$$H_{v_{s_1},44}(\phi, \rho) = \frac{1}{R^2} (2B_w^2 (J_m i_{G,wh}^2 + J_w + R^2 m_{wb} + R^2 m_{wd}) + R^2 (\sin^2(\rho + \phi) J_{B,x} + \cos^2(\rho + \phi) J_{B,z} + H^2 M_B \sin^2(\rho + \phi) + 2HLM_B \sin(\phi) \sin(\rho + \phi) + L^2 M_B \sin^2(\phi) + J_x \sin^2(\phi) + J_z \cos^2(\phi) + 8L^2 m_{wd} \sin^2(\phi) + L^2 M \sin^2(\phi))) \quad (B.54)$$

Elemente der Trägheitsmatrix $\mathbf{H}_{v_{s_3}}(v_{s_3})$, (4.67):

$$H_{v_{s_3},11} = \frac{2J_m i_{G,wh}^2}{R^2} + M_B + \frac{2J_w}{R^2} + 2m_{wb} + 2m_{wd} + M \quad (B.55)$$

$$H_{v_{s_3},12}(\phi, \rho) = HM_B \cos(\rho + \phi) \quad (B.56)$$

$$H_{v_{s_3},22} = J_{B,y} + 2J_m i_{G,bd}^2 + H^2 M_B \quad (B.57)$$

$$H_{v_{s_3},33}(\phi, \rho) = \frac{1}{R^2} (2B_w^2 (J_m i_{G,wh}^2 + J_w + R^2 m_{wb} + R^2 m_{wd}) + R^2 (\sin^2(\rho + \phi) J_{B,x} + \cos^2(\rho + \phi) J_{B,z} + H^2 M_B \sin^2(\rho + \phi) + 2HLM_B \sin(\phi) \sin(\rho + \phi) + L^2 M_B \sin^2(\phi) + J_x \sin^2(\phi) + J_z \cos^2(\phi) + 8L^2 m_{wd} \sin^2(\phi) + L^2 M \sin^2(\phi))) \quad (B.58)$$

Elemente der Zentrifugal- und Coriolis- Matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_1}}(\mathbf{v}_{S_1}, \dot{\mathbf{v}}_{S_1})$, (4.69):

$$C_{\mathbf{v}_{S_1},1}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{R^2} (2(\dot{l} - R\dot{\phi})B_{v,wh} + R^2(-HM_B \sin(\rho) \cos(\phi)(\dot{\theta}^2 + (\dot{\rho} + \dot{\phi})^2) - HM_B \cos(\rho) \sin(\phi)(\dot{\theta}^2 + (\dot{\rho} + \dot{\phi})^2) - L(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \sin(\phi)(M_B + 4m_{wd} + M))) \quad (\text{B.59})$$

$$C_{\mathbf{v}_{S_1},2}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = -\frac{1}{2R} (R\dot{\theta}^2 (\sin(2(\rho + \phi)) (J_{B,x} - J_{B,z}) + \sin(2\phi) (J_x - J_z) + L^2 M \sin(2\phi)) + 4(\dot{l} - R\dot{\phi})B_{v,wh} + RM_B(2g(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi)) + \dot{\theta}^2(H(H \sin(2(\rho + \phi)) + 2L \sin(\rho + 2\phi)) + L^2 \sin(2\phi)) + 2HL\dot{\rho}(\dot{\rho} + 2\dot{\phi}) \sin(\rho)) + 8LRm_{wd} \sin(\phi)(g + 2L\dot{\theta}^2 \cos(\phi)) + 2gLMR \sin(\phi))) \quad (\text{B.60})$$

$$C_{\mathbf{v}_{S_1},3}(\phi, \rho, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} (4\dot{\rho}B_{v,bd} + \dot{\theta}^2 \sin(2(\rho + \phi))(J_{B,z} - J_{B,x}) - 2HM_B(g \sin(\rho + \phi) + \dot{\theta}^2 \cos(\rho + \phi)(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi)) - L\dot{\phi}^2 \sin(\rho))) \quad (\text{B.61})$$

$$C_{\mathbf{v}_{S_1},4}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\phi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{R^2} (\dot{\theta}(R^2((\dot{\rho} + \dot{\phi}) \sin(2(\rho + \phi))(J_{B,x} - J_{B,z}) + \dot{l}(M_B(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi)) + L \sin(\phi)(4m_{wd} + M)) + 2M_B(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi))(H(\dot{\rho} + \dot{\phi}) \cos(\rho + \phi) + L\dot{\phi} \cos(\phi)) + \dot{\phi} \sin(2\phi)(J_x - J_z + L^2(8m_{wd} + M))) + 2B_w^2 B_{v,wh})) \quad (\text{B.62})$$

Elemente der Zentrifugal- und Coriolis- Matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_{S_3}}(\mathbf{v}_{S_3}, \dot{\mathbf{v}}_{S_3})$, (4.70):

$$C_{\mathbf{v}_{S_3},1}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{R^2} (2\dot{l}B_{v,wh} + R^2(\dot{\theta}^2(-(M_B(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi)) + L \sin(\phi)(4m_{wd} + M))) - H\dot{\rho}^2 M_B \sin(\rho + \phi))) \quad (\text{B.63})$$

$$C_{\mathbf{v}_{S_3},2}(\phi, \rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} (4\dot{\rho}B_{v,bd} - 2\dot{\theta}^2 \cos(\rho + \phi)(\sin(\rho + \phi)(J_{B,x} - J_{B,z}) + HM_B(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi))) - 2gHM_B \sin(\rho + \phi)) \quad (\text{B.64})$$

$$C_{\mathbf{v}_{S_3},3}(\phi, \rho, \dot{l}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{R^2} (\dot{\theta}(R^2(2\dot{\rho} \cos(\rho + \phi)(\sin(\rho + \phi)(J_{B,x} - J_{B,z}) + HM_B(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi)) + \dot{l}(M_B(H \sin(\rho + \phi) + L \sin(\phi)) + L \sin(\phi)(4m_{wd} + M))) + 2B_w^2 B_{v,wh})) \quad (\text{B.65})$$

B.8 Modellparameter

Tab. B.1: Parameterübersicht des Modells benötigt für die Simulation.

$B_{v,bd}$	2.23 Nm/rad/s	Viskose Reibung (Mittelwert) des Oberkörperantriebes
$B_{v,wh}$	0.0173 Nm/rad/s	Viskose Reibung (Mittelwert) des Radantriebes
B_w	0.2 m	Halbe Spurweite
$J_{B,x}$	2.01785 kgm ²	Trägheitsmoment des Oberkörpers um die ^e x-Achse
$J_{B,y}$	1.4063 kgm ²	Trägheitsmoment des Oberkörpers um die ^e y-Achse
$J_{B,z}$	0.631221 kgm ²	Trägheitsmoment des Oberkörpers um die ^e z-Achse
J_m	134 × 10 ⁻⁷ kgm ²	Trägheitsmoment des Motorrotors
J_w	0.003 kgm ²	Trägheitsmoment des Hinterrades in die Rollrichtung
J_x	0.06454 kgm ²	Trägheitsmoment des Unterkörpers um die ^c x-Achse
J_y	0.01404 kgm ²	Trägheitsmoment des Unterkörpers um die ^c y-Achse
J_z	0.05203 kgm ²	Trägheitsmoment des Unterkörpers um die ^c y-Achse
K_m	0.0302 Nm/A	Drehmomentkonstante des DC-Motors
M_B	11.627 kg	Masse des Oberkörpers
$i_{G,bd}$	100	Untersetzung, Getriebe des Oberkörperantriebes
$i_{G,wh}$	21	Untersetzung, Getriebe des Radantriebes
m_{wb}	1.358 kg	Masse des Hinterrades inkl. Antrieb
m_{wd}	0.42 kg	Masse des Vorderrades
H	0.476 m	Abstand der Oberkörperachse zum Massenzentrum des Oberkörpers
L	0.15 m	Abstand der Radachse zum Massenzentrum des Unterkörpers
M	3.311 kg	Masse des Unterkörpers
R	0.1 m	Radius der Räder
g	9.81 m/s ²	Beschleunigung der Erdgravitation

B.9 Simulation des hybriden Modells

Alg. B.1.

Alg. B.1: Neubestimmung der Kraftstöße im Fall redundanter Kontaktstellen im Zustand S_3 .

```

if i = 3
    if  $\Lambda_{N,3} < 0$ 
        then  $\Lambda_{N,S_3} = (\Phi_{q,S_2} H_q(q_A)^{-1} \Phi_{q,S_2}^T)^{-1} (\dot{g}_{NE,S_2} - \dot{g}_{NA,S_2})$ 
    end
    if  $\Lambda_{N,4} < 0$ 
        then  $\Lambda_{N,S_3} = (\Phi_{q,S_1} H_q(q_A)^{-1} \Phi_{q,S_1}^T)^{-1} (\dot{g}_{NE,S_1} - \dot{g}_{NA,S_1})$ 
    end
end
end

```

Die Algorithmen Alg. B.2 und Alg. B.3 dienen der Vervollständigung der Beschreibung des Simulationsprinzips des hybriden SCD Modells nach Kapitel 4.3.1.

Alg. B.2. Die Normalrichtungsgeschwindigkeiten $\dot{g}_{NE,j}$ sind physikalisch korrekt nach bestimmtem Kontakt Null. Daraus folgt, dass die betroffenen neugesetzten Werte der Geschwindigkeit \dot{q}_E (konkret sind die Werte ${}^a\dot{z}_b$ und $\dot{\phi}$ betroffen) unabhängig vom berechneten Wert nach (4.94) mit den Werten, die in der Normalrichtung Null betragen, abhängig vom diskreten Zustand S_i , der auftreten soll, überschrieben werden.

Alg. B.2: Korrektur der neugesetzten Geschwindigkeitswerte nach Gleichung (4.94).

```

switch i
    case 1
         $\dot{q}_{E,3} = {}^a\dot{z}_b = 0$ 

    case 2
         $\dot{q}_{E,6} = \dot{\phi} = \frac{{}^a\dot{z}_b}{2L \sin \phi}$ 

    case 3
         $\dot{q}_{E,3} = {}^a\dot{z}_b = 0$ 
         $\dot{q}_{E,6} = \dot{\phi} = 0$ 
end

```

Alg. B.3. Wegen der in Kapitel 4.3.1 beschriebenen Fehlerquellen kann es passieren, dass in bestimmten Situationen, beim Auftreten eines Stoßes, eine der Distanzen zum Boden $g_{NA,j}, j \in \{3,4\}$ einen sehr kleinen negativen Wert aufweist. Das würde bereits ausreichen, dass das SCD den Boden durchquert, was physikalisch nicht korrekt ist. Deshalb werden auch die Positionen des SCD q_E (konkret sind die Werte ${}^a z_b$ und ϕ betroffen) beim Eintreten in einen neuen Zustand S_i geprüft und nach Alg. B.3 korrigiert. Die Korrektur setzt die Positionswerte nicht genau auf den Wert der Kontaktdistanz, sondern etwas darüber, auf den Wert $\varepsilon_{IC} = 1 \times 10^{-6}$ m. Ein Rücksetzen genau auf

die Kontaktdistanz würde eine neue Stoßdetektion verhindern, weil die Stoßdetektion (4.87) nicht nur die jeweiligen Distanzen betrachtet, sondern auch die Tendenzen.

Alg. B.3: Korrektur der neugesetzten Positionswerte.

```

switch  $i$ 
  case 0
    if  $a_{z_b} < R$ 
       $a_{z_b} = R + \varepsilon_{IC}$ 
    end
    if  $\phi > \arccos \frac{R + \delta_{st} + \varepsilon_{IC} - a_{z_b}}{2L}$ 
       $\phi = \arccos \frac{R + \delta_{st} + \varepsilon_{IC} - a_{z_b}}{2L}$ 
       $a_{z_b} = R + \delta_{st} + \varepsilon_{IC} - 2L \cos \phi$ 
    end

  case 1
    if  $a_{z_b} < R$ 
       $a_{z_b} = R + \varepsilon_{IC}$ 
    end

  case 2
    if  $\phi > \arccos \frac{R + \delta_{st} + \varepsilon_{IC} - a_{z_b}}{2L}$ 
       $\phi = \arccos \frac{R + \delta_{st} + \varepsilon_{IC} - a_{z_b}}{2L}$ 
       $a_{z_b} = R + \delta_{st} + \varepsilon_{IC} - 2L \cos \phi$ 
    end

  case 3
     $a_{z_b} = R + \varepsilon_{IC}$ 
    if  $\phi \geq 0$ 
       $\phi = \arccos \frac{\delta_{st}}{2L}$ 
    else
       $\phi = -\arccos \frac{\delta_{st}}{2L}$ 
    end
end
end

```

B.10 Simulationsbeispiel des nicht geregelten SCD

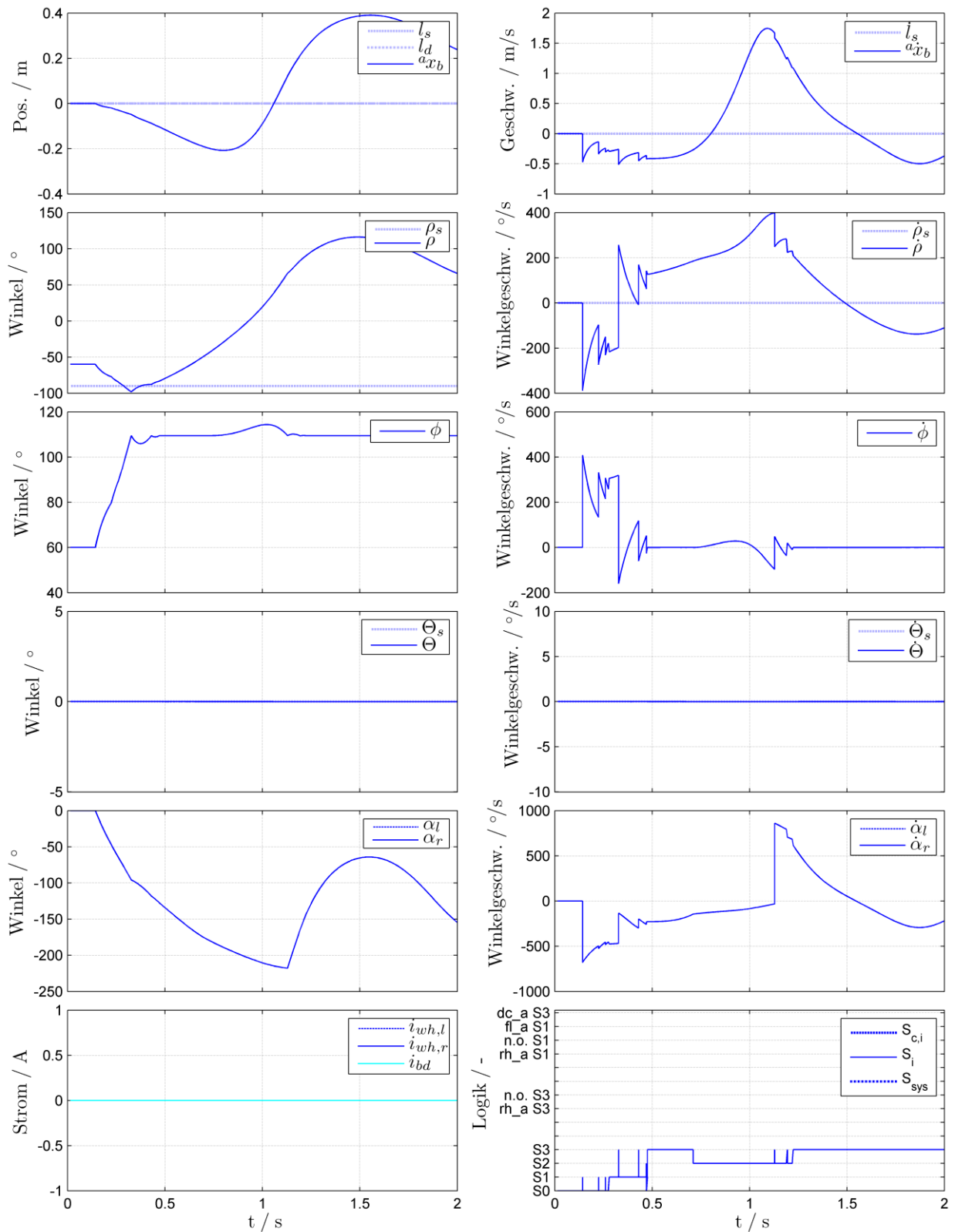


Abb. B.7: Simulationsverläufe für das Beispiel ohne Regelung.

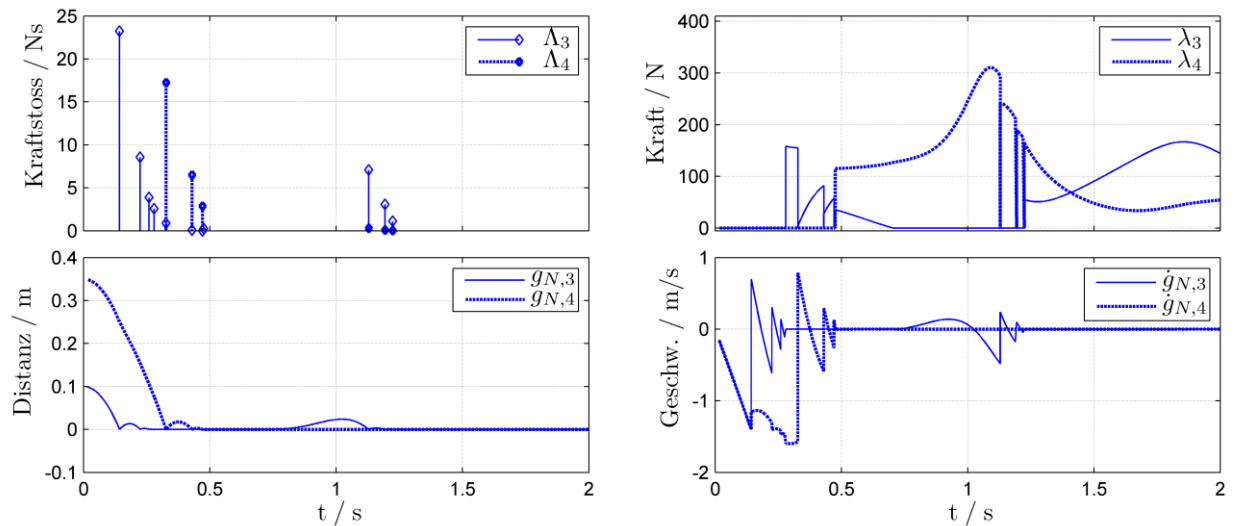
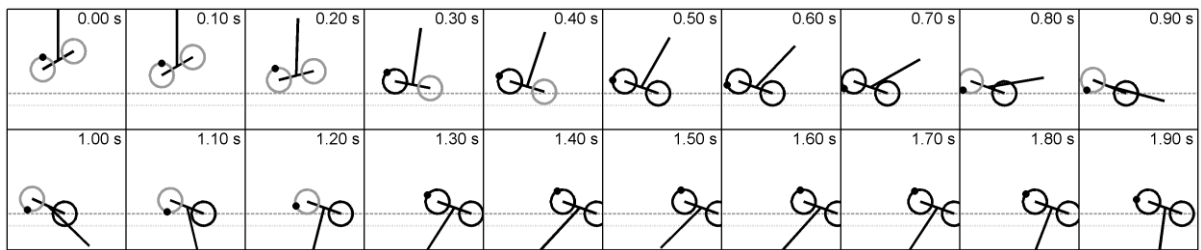


Abb. B.8: Simulationsverläufe für das Beispiel ohne Regelung.

Abb. B.9: SCD-Umriss Diagramm⁴⁶ für das Beispiel ohne Regelung.

Die nicht geänderten Modellparameter sind in Tab. B.1 ersichtlich. Die Anfangszustände und variierten Parameter:

- Zeitkontinuierlicher Anfangszustand:

$$\mathbf{q}_0 = [{}^a x_{b,0}, {}^a y_{b,0}, {}^a z_{b,0}, \alpha_{l,b,0}, \alpha_{r,b,0}, \phi_0, \rho_0]^T = [0, 0, 0.2, 0, 0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}]^T,$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}_0 \in \mathbb{R}^7,$$

- Diskreter Anfangszustand: S_0 ,
- Matrix der Stoßzahlen: $\epsilon_N = \text{diag}(0, 0, \epsilon_{N,3}, \epsilon_{N,4}) = \text{diag}(0, 0, 0.5, 0.5)$,
- Stufenhöhe: $\delta_{st} = -0.1$ m.

Die Simulationsverläufe mit den relevanten Größen wurden in den Abb. B.7 und Abb. B.8 dargestellt. Die Beschreibung der Diagrammbeschriftung „Logik“ in Abb. B.7 ist im Anhang im Teil D zu finden. Ein Diagramm mit dem zeitlichen Ablauf des SCD-Umrisses, dargestellt in Abb. B.9, soll den Verlauf verdeutlichen.

⁴⁶ Die vorhandene Form des Diagramms (aus dem Griechischen *diagramma* = Umriss, Figur) stellt die Lage des SCD in bestimmten Zeitpunkten aus der Sicht des absoluten Koordinatensystems dar. Die Geometrie des SCD ist idealisiert, maßstabsgerecht mit Ausnahme des Körpers dargestellt. Die dargestellte Länge des Körpers entspricht der Länge zum Massenzentrum des Körpers. Die Helligkeit der Räder entspricht dem Kontaktzustand des jeweiligen Rades: schwarz deutet auf einen aktiven Kontakt und grau auf einen passiven Kontakt hin. Der Punkt auf den hinteren, angetriebenen Rädern deutet auf die Drehung der Hinterräder hin.

Das Beispiel behandelt den Fall mit unterschiedlichen Bodenhöhen zu den Vorder- bzw. Hinterrädern. Zudem ist die Anfangslage des Unterkörpers nicht senkrecht (Abb. B.9, $t = 0$ s). Dieser Höhenunterschied stellt die Stufenhöhe dar, welche mit δ_{st} gekennzeichnet ist. Nach den anfänglichen Kraftstößen Λ_3 mit den Hinterrädern (Abb. B.8, Kraftstoß, bei $t \approx 0.2$ s) kommt es nach der Unterbrechung des *Zeno*-Verhaltens zum Aktivieren des Kontakts und somit zum Übergang $S_0 \rightarrow S_1$.

Der Verlauf des auftretenden diskreten Zustands (Abb. B.7, Logik) beginnt bei S_0 , zeigt drei Ausschläge zum S_1 mit der theoretischen Dauer von 0 s und endet schließlich erst bei in S_1 . Diese Ausschläge sind aus programmtechnischen Gründen vorhanden und sind als potentielle Übergänge zum entsprechenden diskreten Zustand zu deuten. Tatsächlich ist das SCD erst nach dem Zeitpunkt $t \approx 0.3$ s im Zustand S_1 .

Bei $t \approx 0.5$ s kommt es dann auch nach einigen Stößen zum Kontakt der Vorderräder mit dem Boden und somit zum Übergang $S_1 \rightarrow S_3$. Der Unterkörper ist dann zwar in einer Schräglage, aber mit beiden Radachsen am Boden, wobei der Oberkörper beschleunigt. Durch die Bewegung der Oberkörperdrehachse, welche reibungsbehaftet ist, bildet sich gegenüber dem Unterkörper ein Moment, das groß genug ist, um den Unterkörper von den Hinterrädern hoch zu heben. Der Kontakt löst sich durch das Erlöschen der Bodenkraft λ_3 bei $t \approx 0.7$ s (Abb. B.8, Kraft) auf und es kommt zum Übergang $S_3 \rightarrow S_2$.

Nun befindet sich das SCD nur mit den Vorderrädern im Kontakt zum Boden. Während dieser Phase (S_2) kann man beobachten, dass sich die Hinterräder frei drehen bis zum Augenblick des ersten Kraftstoßes Λ_3 bei $t \approx 1.1$ s wo es zur abrupten Geschwindigkeitsänderung der Räder α_l und α_r (Abb. B.7, Winkel) kommt. Der Charakter von diesem Stoß in die longitudinale Richtung des Bodenkontaktes ist plastisch wegen der Annahme $\epsilon_{N,1} = 0$. Ab den Zeitpunkt $t \approx 1.2$ s kommt es zum erneuten Kontakt der Hinterräder mit dem Boden, was mit dem Übergang $S_2 \rightarrow S_3$ gekennzeichnet ist. Im Zustand S_3 pendelt das SCD nur noch aus und endet schließlich mit dem Oberkörper in der unteren Winkellage.

C Anhang: Regelung

C.1 Ermittlung des Neigungswinkels

Die Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} H_i(\dot{\rho} + \dot{\phi}) \cos(\rho + \phi) + \dot{l} + L\dot{\phi} \cos \phi \\ -H_i(\dot{\rho} + \dot{\phi}) \sin(\rho + \phi) - L\dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

und die Beschleunigung des Punkts 1:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} H_i(\ddot{\rho} + \ddot{\phi}) \cos(\rho + \phi) - H_i(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \sin(\rho + \phi) + \ddot{l} + L\ddot{\phi} \cos \phi - L\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ -H_i(\ddot{\rho} + \ddot{\phi}) \sin(\rho + \phi) - H_i(\dot{\rho} + \dot{\phi})^2 \cos(\rho + \phi) - L\ddot{\phi} \sin \phi - L\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Parameterwerte des Neigungssensormodells:

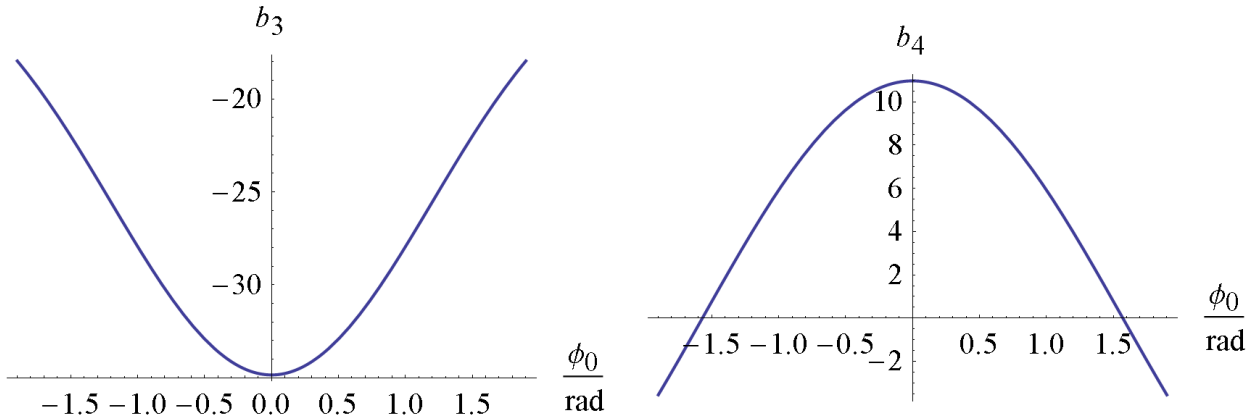


Abb. C.1: Parameterverlauf von b_3 (links) und b_4 (rechts) des linearisierten Modells des Neigungssensors in Abhängigkeit des Winkels ϕ_0 bei stationärem Gleichgewicht des SCD.

Die Hurwitz-Matrix des Beobachters:

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 L_p K_{P,sf} & b_3 L_p K_{P,sf} - R K_{P,sf} + 2d_0 \omega_0 L_p & 0 & 0 \\ \omega_0^2 L_p K_{I,sf} & b_3 L_p K_{I,sf} - R K_{I,sf} + \omega_0^2 L_p & L_p & 0 \\ 0 & \omega_0^2 L_p K_{P,sf} & b_3 L_p K_{P,sf} - R K_{P,sf} + 2d_0 \omega_0 L_p & 0 \\ 0 & \omega_0^2 L_p K_{I,sf} & b_3 L_p K_{I,sf} - R K_{I,sf} + \omega_0^2 L_p & L_p \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Bedingungen für die Stabilität des Beobachters nach dem *Hurwitz*-Kriterium:

$$\begin{aligned}
 K_{I,sf} > 0 \wedge K_{P,sf} > 0 \wedge b_3 K_{I,sf} + \omega_0^2 > 0 \wedge b_3 K_{P,sf} + 2d_0 \omega_0 > 0 \wedge 2d_0 K_{I,sf} \\
 < \omega_0 K_{P,sf} \wedge \omega_0 (K_{P,sf}^2 (R - (b_3 - 1)L_p) + 4d_0^2 L_p K_{I,sf}) \\
 < 2d_0 K_{P,sf} (L_p (\omega_0^2 - b_3 K_{I,sf}) + R K_{I,sf})
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

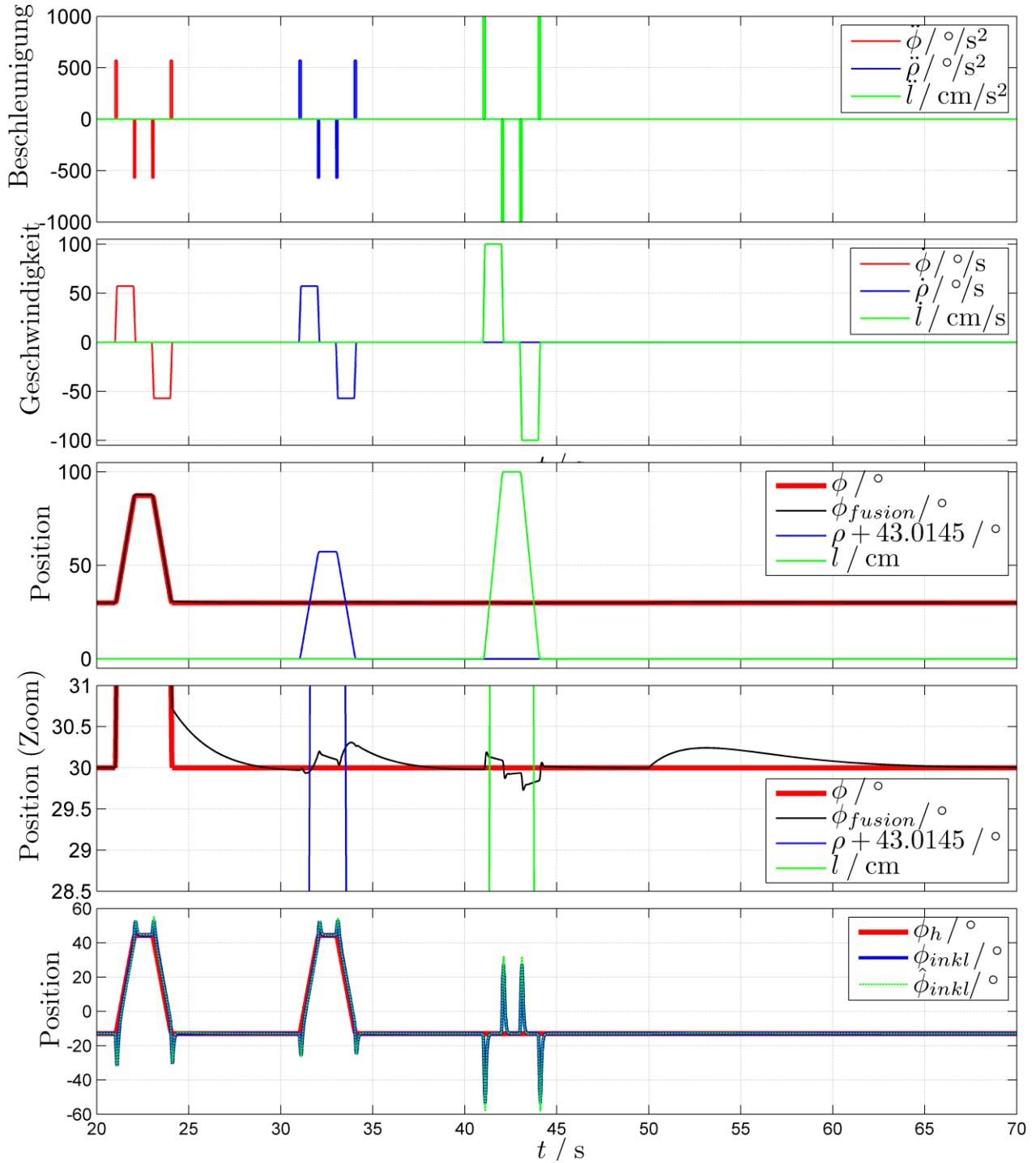


Abb. C.2: Simulation der Sensordatenfusion des Neigungswinkels ϕ . Im Zeitpunkt $t = 50$ s wird ein sprungförmiges Drehtensorsensor-Offset mit einem typischen Wert $\dot{\phi}_{off} = 0.2^\circ/s$ eingeleitet.

Die Abb. C.3 stellt die Größen der Sensordatenfusion dar. Die Hinterräder des SCD wurden zu $l = 0$ und der Oberkörper zu $\rho = -90^\circ$ fixiert. Der Unterkörperwinkel ϕ wird durch manuelle Bewegung des SCD geändert. In diesem Fall muss $\phi = -\alpha_l = -\alpha_r$ sein. Es ist ein gutes Folgen der Ausgangsgröße der Sensordatenfusion ϕ_{fusion} bemerkbar. Gleichzeitig ist die nichtminimalphasige Eigenschaft des Inklinometers deutlich.

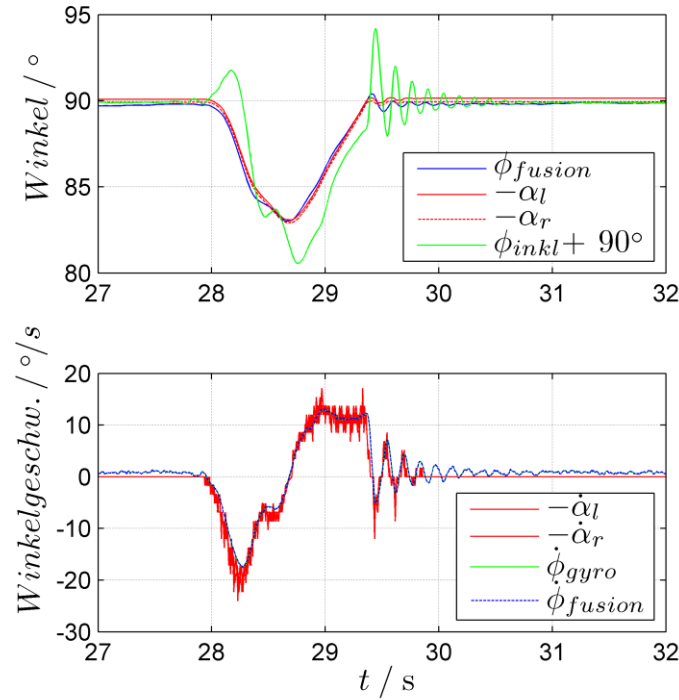


Abb. C.3: Messung der Sensordatenfusion.

C.2 Mathematische Notation

Nach [49] ist die mathematische Notation bei Anwendung an nichtlineare Regelungssysteme beschrieben.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{C.5}$$

Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n_v}]^T \in \mathbb{R}^{n_v \times 1}$, $x_j = x_j(t)$,

Eingangsvektor $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{m_v}]^T \in \mathbb{R}^{m_v \times 1}$, $u_k = u_k(t)$,

Ausgangsvektor $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{p_v}]^T \in \mathbb{R}^{p_v \times 1}$, $y_q = y_q(t)$,

Systemfunktion flaches (smooth) Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_v \times 1}$, Eingangsfunktion, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m_v \times 1}$, Ausgangsfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{p_v \times 1}$.

Differential oder Gradient der realen Funktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ist gleich der *Jacobi*-Matrix von $\mathbf{h}(\mathbf{x})$:

$$d\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_n} \right] = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (\text{C.6})$$

Differentielle Operation: Ableitung von \mathbf{h} entlang \mathbf{f} . Diese differentielle Operation ist als inneres Produkt des Differentialies $d\mathbf{h}(\mathbf{x})$ und der Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ definiert:

$$\langle d\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) \quad (\text{C.7})$$

Die resultierende neue Funktion wird geschrieben als:

$$L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) \quad (\text{C.8})$$

Und wird als *Lie*⁴⁷-Ableitung bezeichnet. Eine Wiederholung dieser Operation ist möglich. Als Beispiel die Ableitung von \mathbf{h} zunächst entlang des Vektorfeldes \mathbf{f} und dann entlang \mathbf{g} :

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (\text{C.9})$$

Eine κ -te Ableitung ist definiert als:

$$L_{\mathbf{f}}^{\kappa}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_{\mathbf{f}}^{\kappa-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.10})$$

mit $L_{\mathbf{f}}^0\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$.

⁴⁷ Benannt nach *Sophus Lie*, norwegischer Mathematiker.

C.3 Modell im Zustandsraum

$$\mathbf{f}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} \dot{l} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\Theta} \\ \frac{C_{v,S_1,3}(H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,22} - H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}) + C_{v,S_1,2}(H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,23}) - C_{v,S_1,1}(H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,23}^2)}{H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33}} \\ \frac{-C_{v,S_1,3}(H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,13} - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}) - C_{v,S_1,2}(H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,13}^2) + C_{v,S_1,1}(H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,23})}{H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33}} \\ \frac{C_{v,S_1,3}(H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22} - H_{v,S_1,12}^2) + C_{v,S_1,2}(H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,13} - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}) + C_{v,S_1,1}(H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23} - H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,22})}{H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33}} \\ -\frac{C_{v,S_1,4}}{H_{v,S_1,44}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{f}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = \begin{bmatrix} \dot{l} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\Theta} \\ \frac{C_{v,S_3,2}H_{v,S_3,12} - C_{v,S_3,1}H_{v,S_3,22}}{H_{v,S_3,11}H_{v,S_3,22} - H_{v,S_3,12}^2} \\ \frac{C_{v,S_3,1}H_{v,S_3,12} - C_{v,S_3,2}H_{v,S_3,11}}{H_{v,S_3,11}H_{v,S_3,22} - H_{v,S_3,12}^2} \\ -\frac{C_{v,S_3,3}}{H_{v,S_3,33}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Die Eingangsfunktion $\mathbf{g}_{S_i}(\mathbf{x}_{S_i})$ ist aus drei Teilfunktionen $\mathbf{g}_{S_i} = [\mathbf{g}_{S_i,1} \quad \mathbf{g}_{S_i,2} \quad \mathbf{g}_{S_i,3}]$ zusammengesetzt:

$$\mathbf{g}_{S_1,1}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_m i_{G,wh}(H_{v,S_1,23}(RH_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,23}) - (RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33})}{R(H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33})} \\ \frac{K_m i_{G,wh}(-H_{v,S_1,13}(RH_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,23}) + RH_{v,S_1,11}H_{v,S_1,33} + H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,33})}{R(H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33})} \\ \frac{K_m i_{G,wh}(H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,22} + H_{v,S_1,12}(RH_{v,S_1,13} - H_{v,S_1,23}) - RH_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23})}{R(H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33})} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{g}_{S_1,2}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_m i_{G,bd}(H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,22} - H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23})}{H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33}} \\ \frac{K_m i_{G,bd}(H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23} - H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,13})}{H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33}} \\ \frac{K_m i_{G,bd}(H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})}{H_{v,S_1,22}H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23}H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})H_{v,S_1,33}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.14)$$

$$\mathbf{g}_{S_1,3}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{B_w K_m i_{G,wh}}{RH_{v,S_1,44}} \end{bmatrix} \quad (C.15)$$

$$\mathbf{g}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = [\mathbf{g}_{S_3,1} \quad \mathbf{g}_{S_3,2} \quad \mathbf{g}_{S_3,3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_m i_{G,wh}H_{v,S_3,22}}{RH_{v,S_3,11}H_{v,S_3,22} - RH_{v,S_3,12}^2} & \frac{K_m i_{G,bd}H_{v,S_3,12}}{H_{v,S_3,12}^2 - H_{v,S_3,11}H_{v,S_3,22}} & 0 \\ \frac{K_m i_{G,wh}H_{v,S_3,12}}{R(H_{v,S_3,12}^2 - H_{v,S_3,11}H_{v,S_3,22})} & \frac{K_m i_{G,bd}H_{v,S_3,11}}{H_{v,S_3,11}H_{v,S_3,22} - H_{v,S_3,12}^2} & \frac{B_w K_m i_{G,wh}}{RH_{v,S_3,33}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.16)$$

C.4 Exakte Linearisierung im Allgemeinen

Die zusammengesetzten *Lie*-Ableitungen für die drei betrachteten Ausgangsfunktionen $y_{S_i,q}$, $q = \{1,2,3\}$, $L_{f_{S_i}}^{\kappa} \mathbf{h}_{S_i} = [L_{f_{S_i}}^{\kappa} y_{S_i,j}]$ und $L_{g_{S_i}} L_{f_{S_i}}^{\kappa} \mathbf{h}_{S_i} = [L_{g_{S_i}} L_{f_{S_i}}^{\kappa} y_{S_i,q}]$, $\kappa \in \{0,1,2, \dots\}$ sind im Folgenden ausgeschrieben:

$$L_{f_{S_i}}^k \mathbf{h}_{S_i} = \begin{bmatrix} L_{f_{S_i}}^k y_{S_i,1} \\ L_{f_{S_i}}^k y_{S_i,2} \\ L_{f_{S_i}}^k y_{S_i,3} \end{bmatrix}, \quad L_{g_{S_i}} L_{f_{S_i}}^k \mathbf{h}_{S_i} = \begin{bmatrix} L_{g_{S_i}} L_{f_{S_i}}^k y_{S_i,1} \\ L_{g_{S_i}} L_{f_{S_i}}^k y_{S_i,2} \\ L_{g_{S_i}} L_{f_{S_i}}^k y_{S_i,3} \end{bmatrix}. \quad (C.17)$$

Die einzelnen $L_{f_{S_1}}^{\kappa} y_{S_1,q}$ *Lie*-Ableitungen für $q \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned} L_{f_{S_1}}^0 y_{S_1,q} &= y_{S_1,q}, \\ L_{f_{S_1}}^1 y_{S_1,q} &= \partial_l y_{S_1,q} \dot{l} + \partial_{\theta} y_{S_1,q} \dot{\theta} + \partial_{\rho} y_{S_1,q} \dot{\rho} + \partial_{\phi} y_{S_1,q} \dot{\phi}, \\ L_{f_{S_1}}^2 y_{S_1,q} &= \dot{l} (\partial_{ll} y_{S_1,q} \dot{l} + \partial_{l\theta} y_{S_1,q} \dot{\theta} + \partial_{l\rho} y_{S_1,q} \dot{\rho} + \partial_{l\phi} y_{S_1,q} \dot{\phi}) + \\ &\quad \dot{\theta} (\partial_{l\theta} y_{S_1,q} \dot{l} + \partial_{\theta\theta} y_{S_1,q} \dot{\theta} + \partial_{\rho\theta} y_{S_1,q} \dot{\rho} + \partial_{\phi\theta} y_{S_1,q} \dot{\phi}) + \\ &\quad \dot{\phi} (\partial_{l\phi} y_{S_1,q} \dot{l} + \partial_{\phi\theta} y_{S_1,q} \dot{\theta} + \partial_{\phi\rho} y_{S_1,q} \dot{\rho} + \partial_{\phi\phi} y_{S_1,q} \dot{\phi}) + \\ &\quad \dot{\rho} (\partial_{l\rho} y_{S_1,q} \dot{l} + \partial_{\rho\theta} y_{S_1,q} \dot{\theta} + \partial_{\rho\rho} y_{S_1,q} \dot{\rho} + \partial_{\phi\rho} y_{S_1,q} \dot{\phi}) - \\ &\quad \frac{\partial_{\phi} y_{S_1,q}}{\text{Den}_{L,S_1}} (-C_{v,S_1,3} (H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,13} - H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,23}) - \\ &\quad C_{v,S_1,2} (H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,13}^2) + \\ &\quad C_{v,S_1,1} (H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,13} H_{v,S_1,23})) - \\ &\quad \frac{\partial_l y_{S_1,q}}{\text{Den}_{L,S_1}} (C_{v,S_1,3} (H_{v,S_1,13} H_{v,S_1,22} - H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,23}) + \\ &\quad C_{v,S_1,2} (H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,13} H_{v,S_1,23}) - \\ &\quad C_{v,S_1,1} (H_{v,S_1,22} H_{v,S_1,33} - H_{v,S_1,23}^2)) + \\ &\quad \frac{\partial_{\rho} y_{S_1,q}}{\text{Den}_{L,S_1}} (C_{v,S_1,3} (H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,22} - H_{v,S_1,12}^2) + \\ &\quad C_{v,S_1,2} (H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,13} - H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,23}) + \\ &\quad C_{v,S_1,1} (H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,23} - H_{v,S_1,13} H_{v,S_1,22})) - \\ &\quad \frac{\partial_{\theta} y_{S_1,q} C_{v,S_1,4}}{H_{v,S_1,44}}, \\ \text{Den}_{L,S_1} &= H_{v,S_1,22} H_{v,S_1,13}^2 - 2H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,23} H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,23}^2 \\ &\quad + (H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,22}) H_{v,S_1,33}. \end{aligned} \quad (C.18)$$

Die einzelnen $L_{\mathbf{f}_{S_3}}^{\kappa} y_{S_3,q}$ Lie-Ableitungen für $q \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{f}_{S_3}}^0 y_{S_3,q} &= y_{S_3,q}, \\
L_{\mathbf{f}_{S_3}}^1 y_{S_3,q} &= \partial_l y_{S_3,q} \dot{l} + \partial_{\Theta} y_{S_3,q} \dot{\Theta} + \partial_{\rho} y_{S_3,q} \dot{\rho}, \\
L_{\mathbf{f}_{S_3}}^2 y_{S_3,q} &= \dot{l} (\partial_{ll} y_{S_3,q} \dot{l} + \partial_{l\Theta} y_{S_3,q} \dot{\Theta} + \partial_{l\rho} y_{S_3,q} \dot{\rho}) + \\
&\quad \dot{\Theta} (\partial_{l\Theta} y_{S_3,q} \dot{l} + \partial_{\Theta\Theta} y_{S_3,q} \dot{\Theta} + \partial_{\rho\Theta} y_{S_3,q} \dot{\rho}) + \\
&\quad \dot{\rho} (\partial_{l\rho} y_{S_3,q} \dot{l} + \partial_{\rho\Theta} y_{S_3,q} \dot{\Theta} + \partial_{\rho\rho} y_{S_3,q} \dot{\rho}) + \\
&\quad \frac{\partial_l y_{S_3,q}}{\text{Den}_{L,S_3}} (C_{v,S_3,2} H_{v,S_3,12} - C_{v,S_3,1} H_{v,S_3,22}) + \\
&\quad \frac{\partial_{\rho} y_{S_3,q}}{\text{Den}_{L,S_3}} (C_{v,S_3,1} H_{v,S_3,12} - C_{v,S_3,2} H_{v,S_3,11}) + \\
&\quad \frac{\partial_{\Theta} y_{S_3,q} C_{v,S_3,3}}{H_{v,S_3,33}}, \\
\text{Den}_{L,S_3} &= H_{v,S_3,11} H_{v,S_3,22} - H_{v,S_3,12}^2.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Die einzelnen $L_{\mathbf{g}_{S_1}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^{\kappa} \mathbf{h}_{S_1} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_{S_1}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^{\kappa} y_{S_1,1} \\ L_{\mathbf{g}_{S_1}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^{\kappa} y_{S_1,2} \\ L_{\mathbf{g}_{S_1}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^{\kappa} y_{S_1,3} \end{bmatrix}$ Ableitungen:

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{g}_{S_1,1}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^0 y_{S_1,q} &= L_{\mathbf{g}_{S_1,1}} y_{S_1,q} = 0, \\
L_{\mathbf{g}_{S_1,2}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^0 y_{S_1,q} &= L_{\mathbf{g}_{S_1,2}} y_{S_1,q} = 0, \\
L_{\mathbf{g}_{S_1,3}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^0 y_{S_1,q} &= L_{\mathbf{g}_{S_1,3}} y_{S_1,q} = 0, \\
L_{\mathbf{g}_{S_1,1}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^1 y_{S_1,q} &= \frac{K_m i_{G,wh}}{R \text{Den}} (-\partial_{\phi} y_{S_1,q} R H_{v,S_1,13}^2 + (\partial_{\rho} y_{S_1,q} H_{v,S_1,22} + (\partial_l y_{S_1,q} R \\
&\quad - \partial_{\phi} y_{S_1,q}) H_{v,S_1,23}) H_{v,S_1,13} + \partial_l y_{S_1,q} H_{v,S_1,23}^2 - \partial_{\rho} y_{S_1,q} R H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,23} \\
&\quad + \partial_{\phi} y_{S_1,q} R H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,33} - \partial_l y_{S_1,q} H_{v,S_1,22} H_{v,S_1,33} \\
&\quad + H_{v,S_1,12} (\partial_{\rho} y_{S_1,q} R H_{v,S_1,13} - \partial_{\rho} y_{S_1,q} H_{v,S_1,23} + (\partial_{\phi} y_{S_1,q} - \partial_l y_{S_1,q} R) H_{v,S_1,33})), \\
L_{\mathbf{g}_{S_1,2}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^1 y_{S_1,q} &= \frac{K_m i_{G,bd}}{\text{Den}} (\partial_{\rho} y_{S_1,q} H_{v,S_1,12}^2 - (\partial_{\phi} y_{S_1,q} H_{v,S_1,13} + \partial_l y_{S_1,q} H_{v,S_1,23}) H_{v,S_1,12} \\
&\quad + \partial_l y_{S_1,q} H_{v,S_1,13} H_{v,S_1,22} + H_{v,S_1,11} (\partial_{\phi} y_{S_1,q} H_{v,S_1,23} - \partial_{\rho} y_{S_1,q} H_{v,S_1,22})), \\
L_{\mathbf{g}_{S_1,3}} L_{\mathbf{f}_{S_1}}^1 y_{S_1,q} &= \frac{B_w K_m i_{G,wh} \partial_{\Theta} y_{S_1,q}}{R H_{v,S_1,44}}, \\
\text{Den} &= H_{v,S_1,22} H_{v,S_1,13}^2 - 2 H_{v,S_1,12} H_{v,S_1,23} H_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,23}^2 + (H_{v,S_1,12}^2 - \\
&\quad H_{v,S_1,11} H_{v,S_1,22}) H_{v,S_1,33}, \\
q &\in \{1,2,3\}.
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Die einzelnen $L_{\mathbf{g}_{S_3}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^\kappa \mathbf{h}_{S_3} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_{S_3}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^\kappa y_{S_3,1} \\ L_{\mathbf{g}_{S_3}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^\kappa y_{S_3,2} \\ L_{\mathbf{g}_{S_3}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^\kappa y_{S_3,3} \end{bmatrix}$ Ableitungen:

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{g}_{S_3,1}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^0 y_{S_3,q} &= L_{\mathbf{g}_{S_3,1}} y_{S_3,q} = 0, \\
L_{\mathbf{g}_{S_3,2}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^0 y_{S_3,q} &= L_{\mathbf{g}_{S_3,2}} y_{S_3,q} = 0, \\
L_{\mathbf{g}_{S_3,3}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^0 y_{S_3,q} &= L_{\mathbf{g}_{S_3,3}} y_{S_3,q} = 0, \\
L_{\mathbf{g}_{S_3,1}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^1 y_{S_3,q} &= \frac{K_m i_{G,wh} (\partial_l y_{S_3,q} H_{v,S_3,22} - \partial_\rho y_{S_3,q} H_{v,S_3,12})}{R(H_{v,S_3,11} H_{v,S_3,22} - H_{v,S_3,12}^2)}, \\
L_{\mathbf{g}_{S_3,2}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^1 y_{S_3,q} &= \frac{K_m i_{G,bd} (\partial_\rho y_{S_3,q} H_{v,S_3,11} - \partial_l y_{S_3,q} H_{v,S_3,12})}{H_{v,S_3,11} H_{v,S_3,22} - H_{v,S_3,12}^2}, \\
L_{\mathbf{g}_{S_3,3}} L_{\mathbf{f}_{S_3}}^1 y_{S_3,q} &= \frac{B_w K_m i_{G,wh} \partial_\Theta y_{S_3,q}}{R H_{v,S_3,33}}, \\
q &\in \{1,2,3\}.
\end{aligned} \tag{C.21}$$

C.4.1 Triviale Bindung

Die Ausgangsfunktionen

$$\mathbf{y}_{S_1} = \begin{bmatrix} y_{S_1,1}(l, \phi, \rho, \Theta) \\ y_{S_1,2}(l, \phi, \rho, \Theta) \\ y_{S_1,3}(l, \phi, \rho, \Theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ \phi \\ \Theta \end{bmatrix}, \mathbf{y}_{S_3} = \begin{bmatrix} y_{S_3,1}(l, \rho, \Theta) \\ y_{S_3,2}(l, \rho, \Theta) \\ y_{S_3,3}(l, \rho, \Theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ \phi \\ \Theta \end{bmatrix}. \tag{C.22}$$

Das Rückkopplungsglied der exakten Linearisierung $\mathbf{r}_{S_i}(\mathbf{x}_{S_i}) = \mathbf{R}_{A,S_i}(\mathbf{x}_{S_i})^{-1} \mathbf{R}_{b,S_i}(\mathbf{x}_{S_i})$ in den Zuständen S_1 und S_3

$$\mathbf{r}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) = \begin{bmatrix} \frac{RC_{v,S_1,1} H_{v,S_1,22} - RC_{v,S_1,2} H_{v,S_1,12}}{K_m i_{G,wh} (RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22})} \\ \frac{C_{v,S_1,3} (RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22}) - H_{v,S_1,23} (RC_{v,S_1,1} + C_{v,S_1,2})}{K_m i_{G,bd} (RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22})} \\ \frac{RC_{v,S_1,4}}{B_w K_m i_{G,wh}} \end{bmatrix} \tag{C.23}$$

$$\mathbf{r}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = \begin{bmatrix} \frac{RC_{v,S_3,1}}{K_m i_{G,wh}} \\ \frac{C_{v,S_3,2}}{K_m i_{G,bd}} \\ \frac{RC_{v,S_3,3}}{B_w K_m i_{G,wh}} \end{bmatrix} \quad (C.24)$$

Das Vorsteuerungsglied der exakten Linearisierung $\mathbf{v}_{S_i}(\mathbf{x}_{S_i}) = \mathbf{R}_{A,S_i}(\mathbf{x}_{S_i})^{-1}$ in den jeweiligen Zuständen S_1 und S_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{S_1}(\mathbf{x}_{S_1}) &= [v_{S_1,1} \quad v_{S_1,2} \quad v_{S_1,3}], \\ v_{S_1,1} &= \begin{bmatrix} -\frac{R(H_{v,S_1,12}^2 - H_{v,S_1,11}H_{v,S_1,22})}{K_m i_{G,wh}(RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22})} \\ \frac{H_{v,S_1,12}(RH_{v,S_1,13} - H_{v,S_1,23}) - RH_{v,S_1,11}H_{v,S_1,23} + H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,22}}{K_m i_{G,bd}(RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22})} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ v_{S_1,2} &= \begin{bmatrix} \frac{R(H_{v,S_1,13}H_{v,S_1,22} - H_{v,S_1,12}H_{v,S_1,23})}{K_m i_{G,wh}(RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22})} \\ \frac{H_{v,S_1,33}(RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22}) - H_{v,S_1,23}(RH_{v,S_1,13} + H_{v,S_1,23})}{K_m i_{G,bd}(RH_{v,S_1,12} + H_{v,S_1,22})} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ v_{S_1,3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{RH_{v,S_1,44}}{B_w K_m i_{G,wh}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (C.25)$$

$$\mathbf{v}_{S_3}(\mathbf{x}_{S_3}) = \begin{bmatrix} \frac{RH_{v,S_3,11}}{K_m i_{G,wh}} & \frac{RH_{v,S_3,12}}{K_m i_{G,wh}} & 0 \\ \frac{H_{v,S_3,12}}{K_m i_{G,bd}} & \frac{H_{v,S_3,22}}{K_m i_{G,bd}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{RH_{v,S_3,33}}{B_w K_m i_{G,wh}} \end{bmatrix}. \quad (C.26)$$

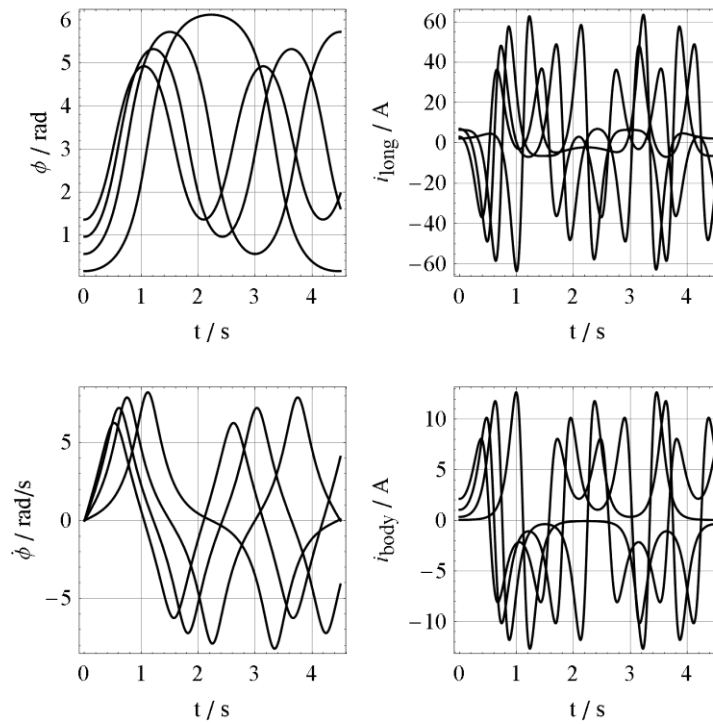
Nullodynamik im Zustand S_1 .

Abb. C.4: Zeitlicher Verlauf der Nulldynamik in Abb. 5.7.

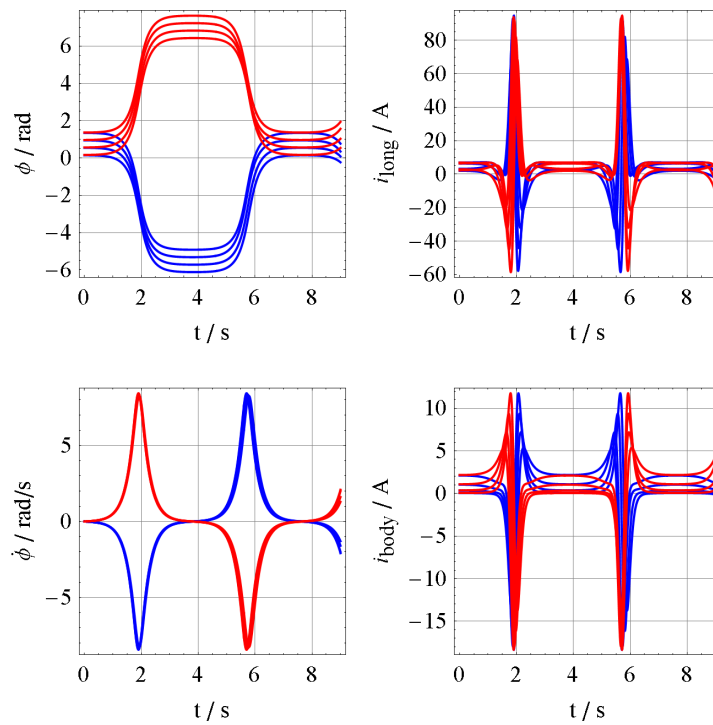


Abb. C.5: Zeitlicher Verlauf der Nulldynamik in Abb. 5.8.

C.5 Lokale Linearisierung im S_1

In Folgendem sind die Elemente der Matrizen \mathbf{A}_{S_1} und \mathbf{B}_{S_1} , des Systems (5.51) dargestellt

$$a_\eta(\phi_0, \rho_0) = \frac{RC_{v,S1,2} \partial_\phi H_{v,S1,12} - (RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}) \partial_\phi C_{v,S1,2}}{(RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22})^2} \quad (C.27)$$

$$a_\xi(\phi_0, \rho_0) = \frac{C_{v,S1,2} (\partial_\rho H_{v,S1,22} + R \partial_\rho H_{v,S1,12}) - (RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}) \partial_\rho C_{v,S1,2}}{(RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22})^2} \quad (C.28)$$

$$b_{long}(\phi_0, \rho_0) = -\frac{RH_{v,S1,11} + H_{v,S1,12}}{RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}} \quad (C.29)$$

$$b_{body}(\phi_0, \rho_0) = -\frac{RH_{v,S1,13} + H_{v,S1,23}}{RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}}. \quad (C.30)$$

In der Abb. C.6 sind diese Werte in Abhängigkeit von dem Arbeitspunkt $\{\phi_0, \rho_0 = f_{bal}(\phi_0)\}$ dargestellt.

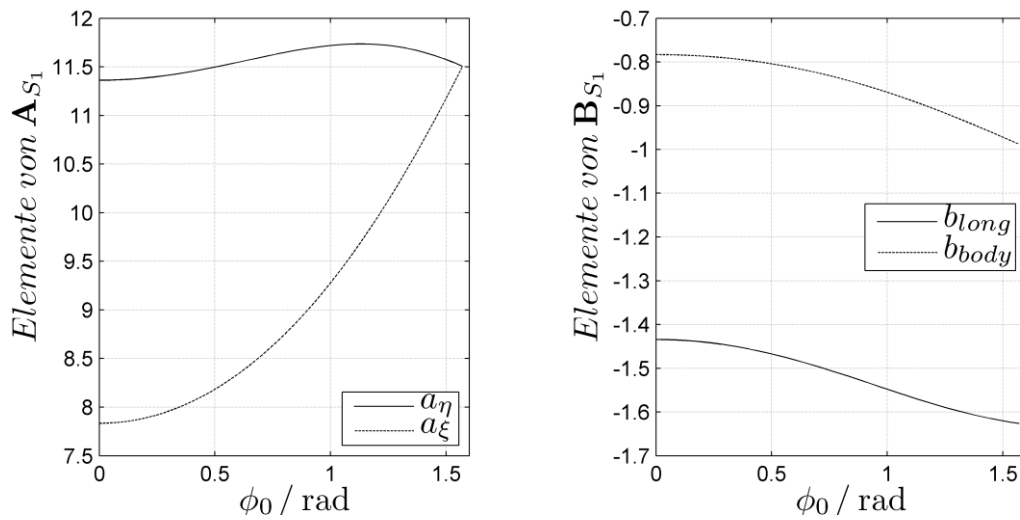


Abb. C.6: Die Elemente der Matrizen \mathbf{A}_{S_1} und \mathbf{B}_{S_1} , des Systems (5.51) in der Abhängigkeit von dem Arbeitspunkt $\{\phi_0, \rho_0 = f_{bal}(\phi_0)\}$.

Tab. C.1: Vergleich der dynamischen Eigenschaften des lokal linearisierten SCD gegenüber dem (partiell) exakt linearisierten SCD jeweils im Zustand S_1 . Die „Pole der Strecke“ bezeichnen das lokal linearisierte System und die „Pole der Strecke ExLin“ das (partiell) exakt linearisierte System, ebenfalls nach einer lokalen Linearisierung. In der Spalte „Pole der Strecke ExLin“ charakterisieren die Pole mit dem Wert Null die Eingang-Ausgangs Dynamik und die restlichen beiden von Null unterschiedliche Pole die interne Dynamik.

<u>Arbeitspunkt 1</u> $i_{body,0} = 0 \text{ A},$ $\phi_0 = 0 \text{ rad},$ $\rho_0 = 0 \text{ rad}.$		<u>Arbeitspunkt 2</u> $i_{body,0} = 4.05 \text{ A},$ $\phi_0 = 0.524 \text{ rad},$ $\rho_0 = -0.751 \text{ rad}.$		<u>Arbeitspunkt 3</u> $i_{body,0} = 7.01 \text{ A},$ $\phi_0 = 1.047 \text{ rad},$ $\rho_0 = -1.448 \text{ rad}.$		<u>Arbeitspunkt 4</u> $i_{body,0} = 8.10 \text{ A},$ $\phi_0 = 1.571 \text{ rad},$ $\rho_0 = -2.038 \text{ rad}.$	
Pole der Strecke	Pole der Strecke ExLin	Pole der Strecke	Pole der Strecke ExLin	Pole der Strecke	Pole der Strecke ExLin	Pole der Strecke	Pole der Strecke ExLin
0	3.371	0	3.393	0	3.425	0	3.392
-24.102	-3.371	-20.042	-3.393	-14.709	-3.425	-12.085	-3.292
-5.041	0	-4.969	0	-4.767	0	-4.409	0
5.137	0	5.017	0	4.684	0	4.263	0
1.793	0	1.609	0	1.069	0	0	0
-0.170	0	-0.170	0	-0.170	0	-0.170	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-0.154	0	-0.136	0	-0.109	0	-0.100	0

C.5.1 Gain Scheduling

Unterschiedliche Ansätze und Ideen stehen unter dem Namen *Gain Scheduling* [73]. *Gain Scheduling* wird in [3] erwähnt und in [74] als ein spezieller Typ des nichtlinearen Reglers (in Anwendung auf nichtlineare Regelstrecken) beschrieben, der aus linearem Regler besteht, dessen Parameter nach einer vorprogrammierten Art in der Abhängigkeit des Arbeitspunktes geändert werden. Eine Übersicht der unterschiedlichen Methoden unter dem übergreifenden Namen *Gain Scheduling* ist beispielsweise in [73] erhältlich.

In dieser Arbeit wird angelehnt an die Behandlung der nichtlinearer Regelungssysteme mittels einer *Gain scheduling* Reglerstruktur in [47], folgendes nichtlineares MIMO System als Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{C.31})$$

in einer Reihe der Arbeitspunkte $\{\mathbf{x}_{0,j}, \mathbf{u}_{0,j}\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ lokal linearisiert und zu folgendem linearen Modellen geführt

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{A}_j \Delta \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_j \Delta \mathbf{u}_j. \quad (\text{C.32})$$

Dabei sind die Matrizen \mathbf{A}_j System- und \mathbf{B}_j Eingangsmatrix

$$\mathbf{A}_j = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\{\mathbf{x}_{0,j}, \mathbf{u}_{0,j}\}}, \quad \mathbf{B}_j = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\{\mathbf{x}_{0,j}, \mathbf{u}_{0,j}\}}. \quad (\text{C.33})$$

und die mit Δ bezeichneten Werten stellen die Abstände zum Arbeitspunkt dar

$$\Delta \mathbf{u}_j = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{0,j}, \quad \Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{0,j}. \quad (\text{C.34})$$

Zu jeweiligem j -tem System wird ein Zustandsregler \mathbf{K}_j und statischer Vorfilter $\mathbf{F}_{st,j}$ angewendet, welche das Regelgesetz bilden

$$\Delta \mathbf{u}_j = \mathbf{F}_{st,j} \Delta \mathbf{w}_j - \mathbf{K}_j \Delta \mathbf{x}_j, \quad \Delta \mathbf{w}_j = \mathbf{w} - \mathbf{w}_{0,j}. \quad (\text{C.35})$$

Die Stellgröße \mathbf{u} welche das nichtlineare System beeinflusst wird als eine gewichtete Größe der benachbarten Größen $\mathbf{u}_{0,j}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ermittelt. In dieser Arbeit wird eine lineare Interpolation zweier benachbarten Stellgrößen verwendet. Angenommen dass der momentane Wert der Arbeitsbereichsbestimmender Größe β_0 sich zwischen zweier benachbarten Werte befindet, $\beta_{0,j-1} < \beta_0 < \beta_{0,j}$, wird die Stellgröße des Systems \mathbf{u} anhand zweier benachbarten Stellgrößen $\mathbf{u}_{0,j-1}$ und $\mathbf{u}_{0,j}$ bestimmt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{d_{GS,j} \mathbf{u}_{j-1} + d_{GS,j-1} \mathbf{u}_j}{d_{GS,j-1} + d_{GS,j}} \\ d_{GS,j-1} &= |\beta_0 - \beta_{0,j-1}| \\ d_{GS,j} &= |\beta_{0,j} - \beta_0|. \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

Die Werte $d_{GS,j-1}$ und $d_{GS,j}$ stellen die Distanzen der Arbeitsbereichsbestimmender Größe β_0 zu den jeweils benachbarten Arbeitspunkten $\beta_{0,j-1}$ und $\beta_{0,j}$. Die Abb. C.7 illustriert die *Gain scheduling* Struktur des betrachteten Regelsystems.

Die Stabilität der einzelnen linearen j -ter Regelungssysteme garantiert nicht die Stabilität des Ganzen Systems der Abb. C.7 [47]. Deshalb muss die Stabilität und gewünschte dynamische Eigenschaften des gesamten Systems geprüft werden. Aus der Praxis ist bekannt, dass das Ansetzen an der Arbeitsbereichsbestimmender Größe β_0 gut funktioniert, wenn diese Variable sich langsam gegenüber der restlichen Dynamik des Systems ändert [48].

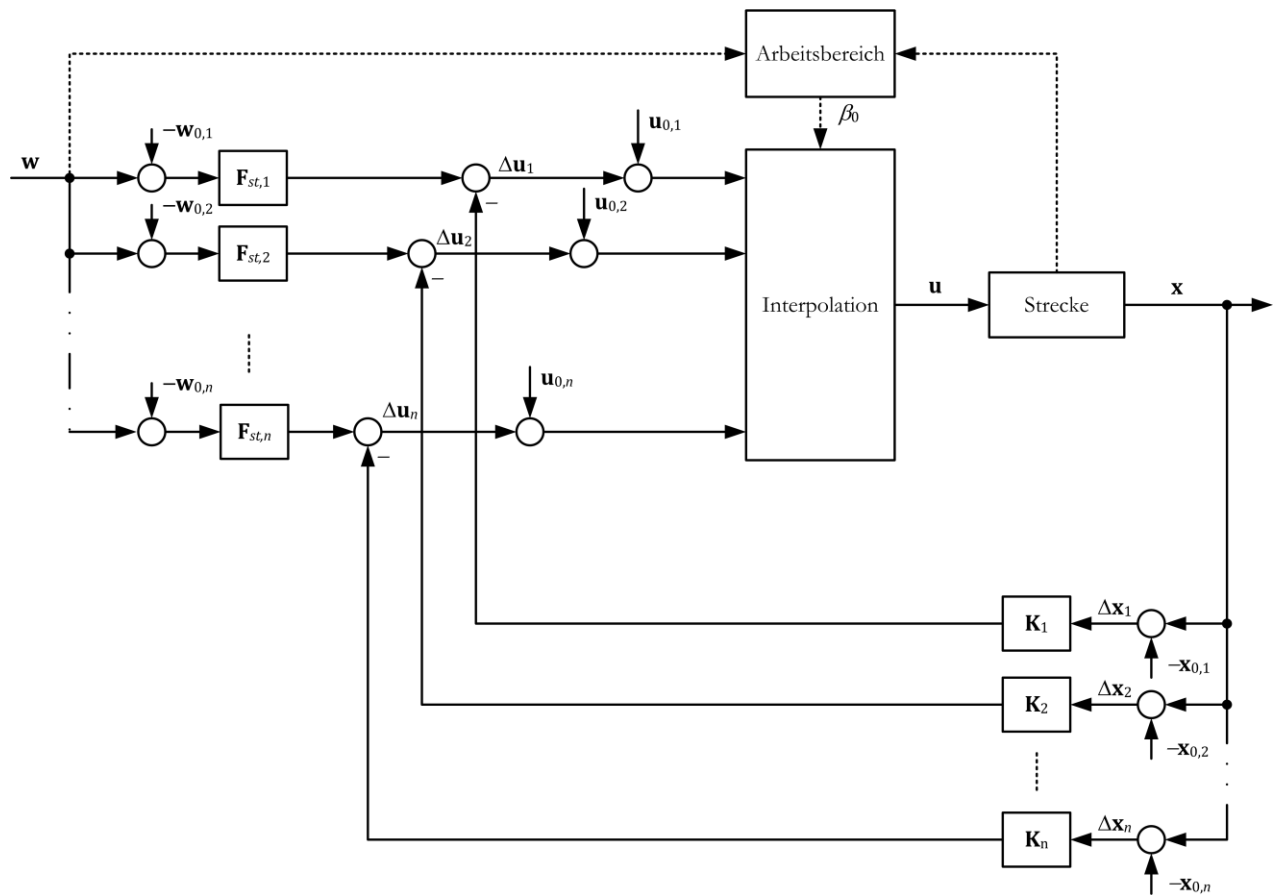


Abb. C.7: Prinzip der Gain scheduling Struktur eines Regelungssystems.

C.5.2 LQ Regelung.

Betrachtet wird ein vollständig steuerbares MIMO System

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (\text{C.37})$$

welches mit einem linearen Zustandsregler geregelt werden soll. Zur Vorgabe der dynamischen Eigenschaften des geregelten Systems bezieht man sich auf die Güteforderungen des gesamten Verlaufs der Stell- und Regelgrößen. Dazu wird ein Gütefunktional J betrachtet, das wie in der Fortführung gezeigt wird, quadratisch ist.

Die Stellung und die Lösung des LQ⁴⁸-Problems ist hier kurz anhand [51] beschrieben. Betrachtet wird eine vollständig steuerbare Regelstrecke (C.37) und ein Gütefunktional

$$J = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{X}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{U}(t) \right) dt \quad (\text{C.38})$$

⁴⁸ Die häufig verwendete Abkürzung LQR steht für *linear-quadratische Regelung*.

mit symmetrischer, positiv semidefiniter⁴⁹ Gewichtungsmatrix \mathbf{Q} und symmetrischer, positiv definit⁵⁰ Gewichtungsmatrix \mathbf{R} . Unter der Voraussetzung, dass das Paar $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{Q}})$ vollständig steuerbar ist, wobei die Matrix $\bar{\mathbf{Q}}$ aus der Zerlegung $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{Q}}$ der Gewichtungsmatrix \mathbf{Q} hervorgeht, ist die Lösung des Optimierungsproblems $\min_{\mathbf{K}} J$ durch die Zustandsrückführung

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{X}(t) \quad (\text{C.39})$$

mit $\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ gegeben. Die Matrix \mathbf{P} ist dabei die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.40})$$

Das quadratische Gütefunktional J gegeben mit (C.38) beinhaltet die Verläufe aller Zustandsvariablen des Zustandsvektors \mathbf{X} sowie die Verläufe der Stellgrößen \mathbf{U} . Der Zustandsregler \mathbf{K}^* sorgt für die Minimierung von J und damit für einen optimalen Übergang vom Anfangszustand \mathbf{X}_0 in die Ruhelage.

Durch die Bedingung der symmetrischen und positiv (semi)definiten Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} ist gewährleistet, dass alle Summanden in (C.38) nichtnegativ sind. Weiterhin ist mit der Bedingung $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{Q}}$ gewährleistet, dass im Gütefunktional alle Eigenvorgänge (Übergänge vom \mathbf{X}_0 zur Ruhelage) „beobachtbar“ sind. Um die Beobachtbarkeit nicht prüfen zu müssen, verwendet man häufig positiv definite Matrizen \mathbf{Q} , für die das Paar $\mathbf{A}, \bar{\mathbf{Q}}$ stets beobachtbar ist. Wenn die Forderungen an die Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} erfüllt sind, so ist der mit dem LQ-Regler geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil.

Um einen optimalen Regler nach oben beschriebenem Kriterium zu erhalten, ist die Aufgabe beim Reglerentwurf, eine geeignete Wahl an der Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} zu treffen, mit denen man die Güteforderungen an das Regelungssystem erfüllen kann. Anhand dessen wird die Riccati-Gleichung gelöst und der optimale Regler bestimmt (erfolgt mittels Funktion `lqr` in *Matlab*). Der Reglerentwurf verläuft im Allgemeinen iterativ. Um aus unüberschaubar vielen Freiheitsgraden sinnvolle Gewichtungsmatrizen leichter finden zu können, bieten Richtlinien in [51] eine Hilfestellung.

C.5.3 Daten zur Stabilisierung mittels Zustandsregler

Longitudinale Dynamik. Es werden die Werte des Zustandsreglers $\mathbf{K}_{S_1, long, j}$, der Pole des geschlossenen Regelkreises $s_{long, j}$ und der entsprechenden Vorfilter $\{\mathbf{F}_{st, 1, long, j}, \mathbf{F}_{st, 2, long, j}\}$ dargestellt exemplarisch, für zwei Arbeitspunkte $j \in \{1, 4\}$ entsprechend Tab. C.1 dargestellt.

Zustandsregler für den Arbeitspunkt 1, $\mathbf{K}_{S_1, long, 1} =$

⁴⁹ Eine Matrix \mathbf{Q} ist positiv semidefinit, wenn $\mathbf{X}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{X}(t) \geq 0$.

⁵⁰ Eine Matrix \mathbf{Q} ist positiv definit, wenn $\mathbf{X}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{X}(t) > 0$.

$$\begin{bmatrix} -22.3577 & -27.4237 & -87.2639 & -26.5816 & -114.6318 & -34.1599 \\ -0.5204 & -0.5254 & 705.7936 & 106.4644 & -1.8145 & -0.5873 \end{bmatrix}. \quad (C.41)$$

Zustandsregler für den Arbeitspunkt 4, $\mathbf{K}_{S_1, long, 4} =$

$$\begin{bmatrix} -22.3606 & -27.3979 & -102.9288 & -29.7303 & -102.1099 & -30.2782 \\ -0.0518 & -0.1059 & 706.4507 & 106.6972 & -0.7259 & -0.2807 \end{bmatrix}. \quad (C.42)$$

Pole des geschlossenen Regelkreises für den Arbeitspunkt 1, $\mathbf{s}_{long, 1} =$

$$\{-99.8413, -13.4763, -7.08462, -3.11786 \pm j0.700082, -1.84606\}. \quad (C.43)$$

Pole des geschlossenen Regelkreises für den Arbeitspunkt 4, $\mathbf{s}_{long, 4} =$

$$\{-99.8963, -13.8324, -7.08318, -3.07834 \pm j0.771367, -1.84588\}. \quad (C.44)$$

Drehdynamik. Die Werte der Drehdynamik bleiben unverändert in unterschiedlichen Arbeitspunkten.

Zustandsregler

$$\mathbf{K}_{S_1, yaw} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}. \quad (C.45)$$

Vorfilter. Vorfilter für den Arbeitspunkt 1

$$[\mathbf{F}_{st, 1, long, 1}, \mathbf{F}_{st, 2, long, 1}] = \begin{bmatrix} -22.35765 & -8.22914 & 0 & 0 & -3.02942 & 0 \\ -0.5204318 & 707.0446 & 0 & 0 & 106.8691 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (C.46)$$

Vorfilter für den Arbeitspunkt 4

$$[\mathbf{F}_{st, 1, long, 4}, \mathbf{F}_{st, 2, long, 4}] = \begin{bmatrix} -22.36065 & -0.8188417 & 0 & 0 & 0.5478822 & 0 \\ -0.0517829 & 707.1765 & 0 & 0 & 106.9778 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (C.47)$$

Die ersten beiden Werte der ersten Spalte des Geschwindigkeitsvorfilters $\mathbf{F}_{st, 1, long}$ in allen Arbeitspunkten wurden mit Null überschrieben um den Einfluss von \dot{l}_s auf die Position l auszuschliessen, damit übermäßiges dynamisches Verhalten der Position verhindert wird.

C.6 Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$

Die ersten partiellen Ableitungen gemäß (5.70) lauten

$$\begin{aligned}
 \partial_l y_{S_1,1} &= 1, & \partial_l y_{S_1,2} &= 0, & \partial_l y_{S_1,3} &= 0, \\
 \partial_\rho y_{S_1,1} &= 0, & \partial_\rho y_{S_1,2} &= 1, & \partial_\rho y_{S_1,3} &= 0, \\
 \partial_\phi y_{S_1,1} &= 0, & \partial_\phi y_{S_1,2} &= -f'_{1 \rightarrow 3}(\phi), & \partial_\phi y_{S_1,3} &= 0, \\
 \partial_\theta y_{S_1,1} &= 0, & \partial_\theta y_{S_1,2} &= 0, & \partial_\theta y_{S_1,3} &= 1.
 \end{aligned} \tag{C.48}$$

Die zweiten partialen Ableitungen gemäß (5.70) lauten

$$\begin{aligned}
 \partial_{qp} y_{S_1,1} &= 0, & \partial_{qp} y_{S_1,2} &= 0, & \partial_{qp} y_{S_1,3} &= 0, \\
 \text{für alle } q \in \{l, \rho, \phi, \theta\} \text{ und } p \in \{l, \rho, \phi, \theta\} \text{ außer} & & & & & \\
 \partial_{\phi\phi} y_{S_1,2} &= -f''_{1 \rightarrow 3}(\phi).
 \end{aligned} \tag{C.49}$$

C.6.1 Bézier-Polynom

Das Bézier-Polynom $B(s)$ der n_B -ter Ordnung mit $n_B + 1$ Koeffizienten ist definiert durch

$$B(s) = \sum_{k=0}^{n_B} \rho_k \binom{n_B}{k} s^k (1-s)^{n_B-k} = \sum_{k=0}^{n_B} \rho_k \frac{n_B!}{k! (n_B - k)!} s^k (1-s)^{n_B-k}. \tag{C.50}$$

Dabei ist $s \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ der normierte Definitionsbereich. Für einen Beispiel der siebten Ordnung $n_B = 7$ werden für die Wertepaare $\{s_j, \rho_j\}$

$$\left\{ \{0, \rho_0\}, \left\{\frac{1}{7}, \rho_1\right\}, \left\{\frac{2}{7}, \rho_2\right\}, \left\{\frac{3}{7}, \rho_3\right\}, \left\{\frac{4}{7}, \rho_4\right\}, \left\{\frac{5}{7}, \rho_5\right\}, \left\{\frac{6}{7}, \rho_6\right\}, \{1, \rho_7\} \right\} \tag{C.51}$$

die Koeffizienten des Bézier-Polynoms $B(s)$ bestimmt. Schließlich wird der normierter Definitionsbereich $s \in [0,1]$ in den benötigten Definitionsbereich $\phi \in [\phi_{min}, \phi_{max}]$ mittels

$$s = \frac{\phi - \phi_{min}}{\phi_{max} - \phi_{min}} \tag{C.52}$$

Transformiert und somit erhält man die Koeffizienten c_k .

Einige Eigenschaften der Bézier-Polynome sind [5]:

- Kleine Parameteränderungen verursachen keine große Änderungen der Polynome, was günstig für die numerische Berechnung ist,

- die Kurve geht genau durch die Endpunkte $B(0) = \rho_0$ und $B(1) = \rho_{n_B}$,
- die Tangenten der Endwerten sind mit den ersten zwei Endpunkten bestimmt $B'(0) = n_B(\rho_1 - \rho_0)$ und $B'(1) = n_B(\rho_{n_B} - \rho_{n_B-1})$.

Konkrete Werte für das Absetzen zum Boden. Für das Absetzen zum Boden

Tab. C.2: Werte des Optimierten Bézier-Polynoms. Die grauen Felder sind während der Optimierung fixiert.

j	$\phi_j \times \frac{\pi}{180} / \text{rad}$	ρ_j / rad	c_j
0	77	-1.7982	-2.2821×10^6
1	78.86	-1.8340	1.1508×10^7
2	80.71	-1.8693	-2.4859×10^7
3	82.57	-1.9041	2.9821×10^7
4	84.43	-1.9391	-2.1455×10^7
5	86.29	-1.7773	9.2576×10^6
6	88.14	-2.311	-2.2183×10^6
7	90	-1.2452	2.2770×10^5

C.6.2 Nulldynamik

Die Lösung der Gleichung (5.78)

$$\mathbf{i}_{v,Z} = \begin{bmatrix} i_{long,Z} \\ i_{body,Z} \\ i_{yaw,Z} \end{bmatrix} \quad (\text{C.53})$$

mit den einzelnen Komponenten in (C.54), (C.55) und (C.56)

$$i_{long,Z} = R \left(C_{v,S1,2} (f_{1 \rightarrow 3}'(\phi) H_{v,S1,13} + H_{v,S1,12}) - C_{v,S1,1} (f_{1 \rightarrow 3}'(\phi) H_{v,S1,23} + H_{v,S1,22}) + \right. \\ \left. \phi^2 f_{1 \rightarrow 3}''(\phi) (H_{v,S1,12} H_{v,S1,23} - H_{v,S1,13} H_{v,S1,22}) \right) / \left(K_m i_{G,wh} (f_{1 \rightarrow 3}'(\phi) (R H_{v,S1,13} + \right. \\ \left. H_{v,S1,23}) + R H_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}) \right) \quad (\text{C.54})$$

$$\begin{aligned}
i_{body,Z} = & (RC_{v,S1,1}(f_{1 \rightarrow 3}'(\phi)H_{v,S1,33} + H_{v,S1,23}) - C_{v,S1,3}(f_{1 \rightarrow 3}'(\phi)(RH_{v,S1,13} + H_{v,S1,23}) + \\
& RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22}) + f_{1 \rightarrow 3}'(\phi)H_{v,S1,33}C_{v,S1,2} + H_{v,S1,23}C_{v,S1,2} - \\
& R\dot{\phi}^2 f_{1 \rightarrow 3}''(\phi)H_{v,S1,33}H_{v,S1,12} + R\dot{\phi}^2 f_{1 \rightarrow 3}''(\phi)H_{v,S1,13}H_{v,S1,23} - \\
& \dot{\phi}^2 f_{1 \rightarrow 3}''(\phi)H_{v,S1,33}H_{v,S1,22} + \dot{\phi}^2 f_{1 \rightarrow 3}''(\phi)H_{v,S1,23}^2) / K_m i_{G,bd}(f'(\phi)(RH_{v,S1,13} + \\
& H_{v,S1,23}) + RH_{v,S1,12} + H_{v,S1,22})
\end{aligned} \tag{C.55}$$

$$i_{yaw,Z} = \frac{RC_{v,S1,4}}{B_w K_m i_{G,wh}}. \tag{C.56}$$

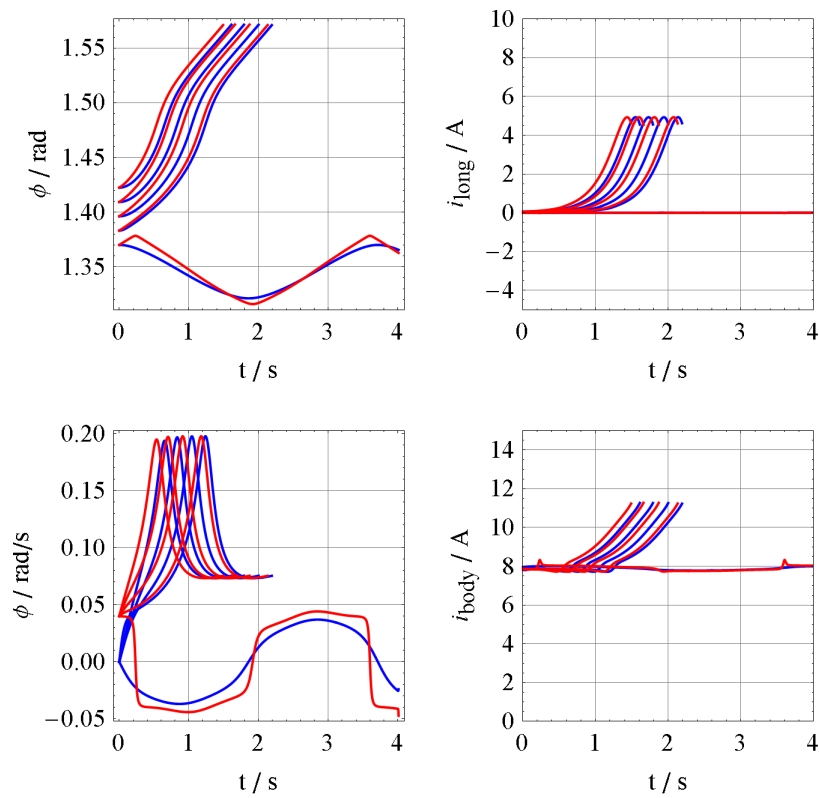


Abb. C.8: Zeitlicher Verlauf der Nulldynamik im Zustand S_1 beim Absetzen, Abb. 5.17.

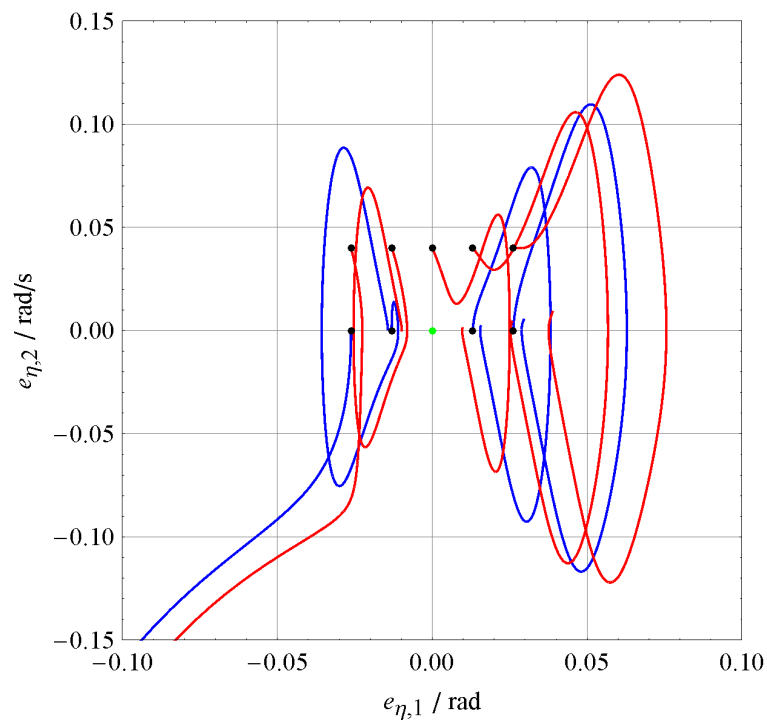


Abb. C.9: Phasenporträt der Nulldynamik beim Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Darstellung durch Differenztrajektorie $\mathbf{e}_\eta(t) = [e_{\eta,1}(t), e_{\eta,2}(t)]^T$ entsprechend Abb. 5.17 im Zeitintervall $t = [0, 1.8]$ s.

D Anhang: Ergebnisse und Anwendung zum Treppensteigen

Bezeichnungen der Variablen des Diagramms „Logik“:

- $S_{sys,m}$, Zustand des Zustandsautomaten der Steuerung/Regelung in der Realität,
- S_{sys} , Zustand des Zustandsautomaten der Steuerung/Regelung in der Simulation,
- $S_{c,m,i}$, Schalterwert des Reglers in der Realität,
- $S_{c,i}$, Schalterwert des Reglers in der Simulation,
- S_i , Zustand des Modells in der Simulation.

Bezeichnungen der Logik-Abszisse:

- S0, S1, S2, S3: Die Werte bestimmen den Zustandswert des Modells und die Schalterwerte der Reglerstruktur im Modell und am realen System (betrifft Variablen: S_i , $S_{c,i}$, $S_{c,m,i}$).
- Werte der Zustandsautomaten der Steuerung/Regelung (betrifft S_{sys} und $S_{sys,m}$):
 - dc_a S3: Abbremsen des Oberkörpers am Boden (S_3) aktiv,
 - fl_a S1: Absetzen (Fallen in S_1) aktiv,
 - n.o. S1: Normaloperation in S_1 aktiv,
 - rh_a S1: Änderung der Sollgröße ρ_s in S_1 aktiv,
 - n.o. S3: Normaloperation in S_3 aktiv,
 - rh_a S3: Änderung der Sollgröße ρ_s in S_3 aktiv.

D.1 Regelung in S_3 , ebener Boden

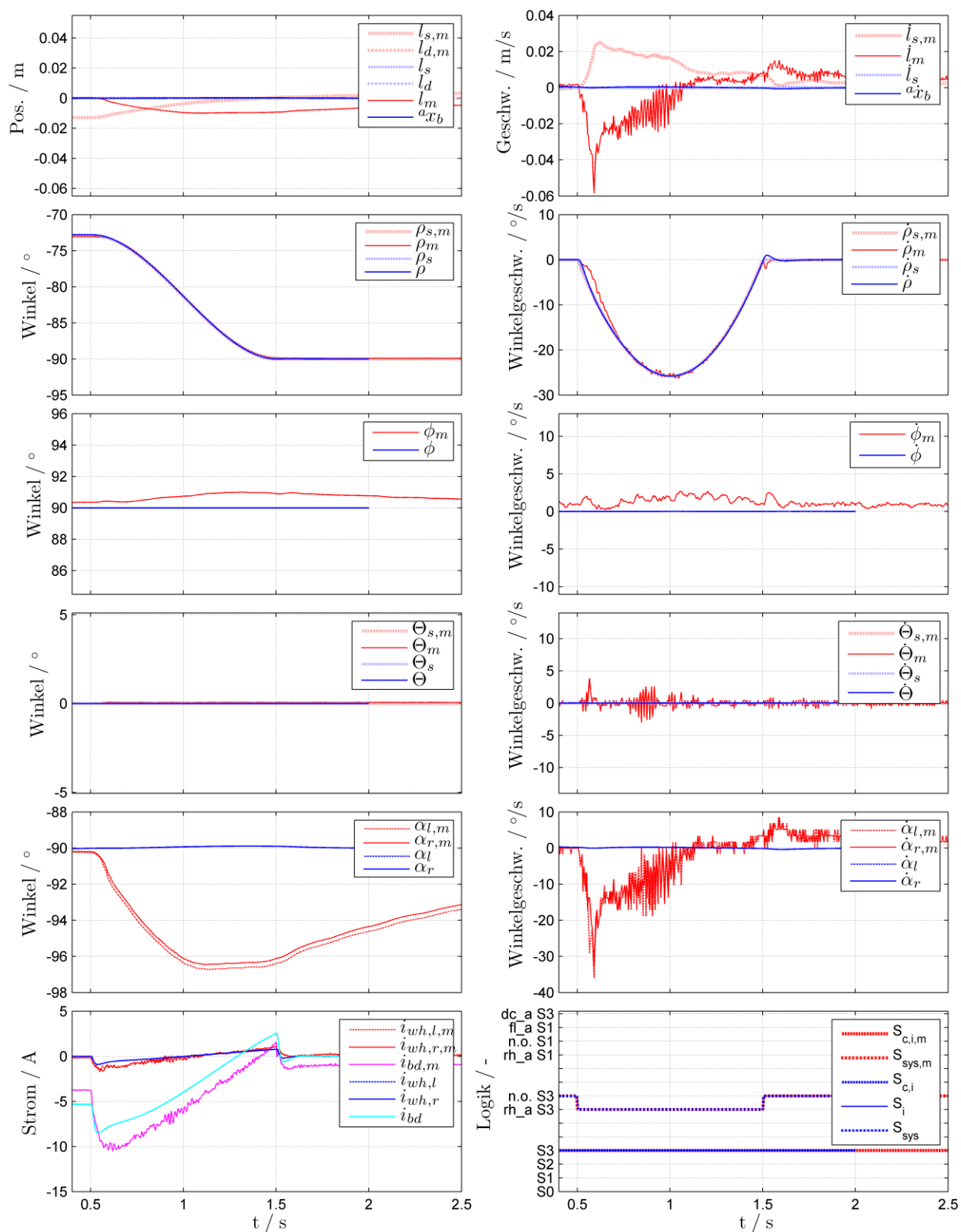


Abb. D.1: Regelung im Zustand S_3 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = -72.8^\circ \rightarrow -90^\circ$, Dauer 1 s. Vergleich Simulation vs. Messung.

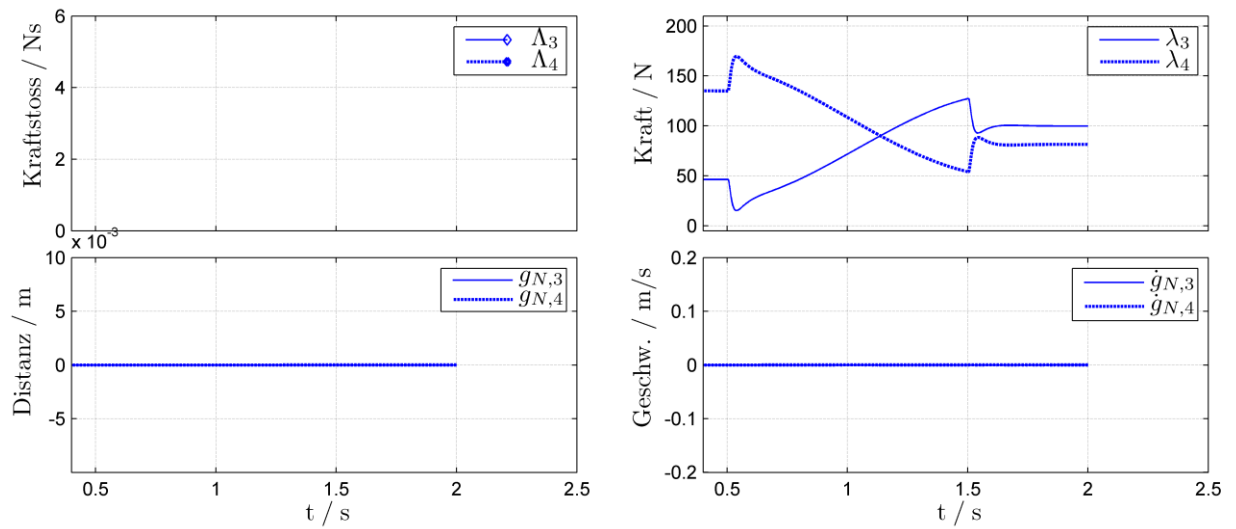


Abb. D.2: Regelung im Zustand S_3 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = -72.8^\circ \rightarrow -90^\circ$, Dauer 1 s. Zusätzliche Simulationsgrößen.

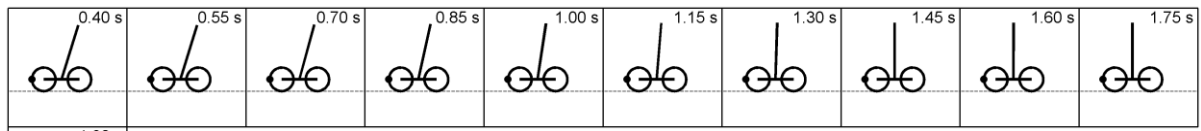


Abb. D.3: Regelung im Zustand S_3 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = -72.8^\circ \rightarrow -90^\circ$, Dauer 1 s. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

D.2 Regelung in S_1 , ebener Boden

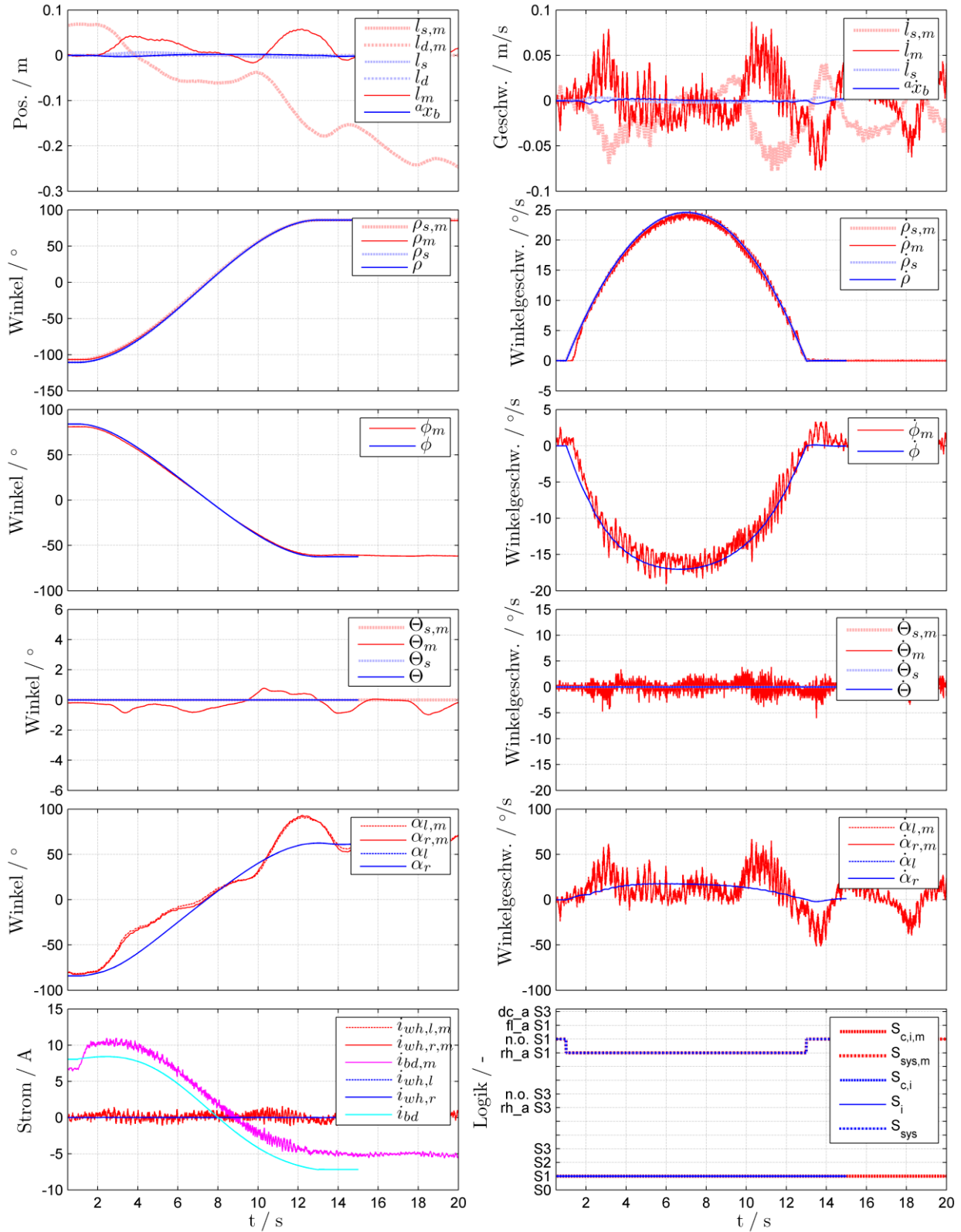


Abb. D.4: Regelung im Zustand S_1 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = \rho_{s,m} = -110.6^\circ \rightarrow 85.9^\circ$, Dauer 12 s. Vergleich Simulation vs. Messung.

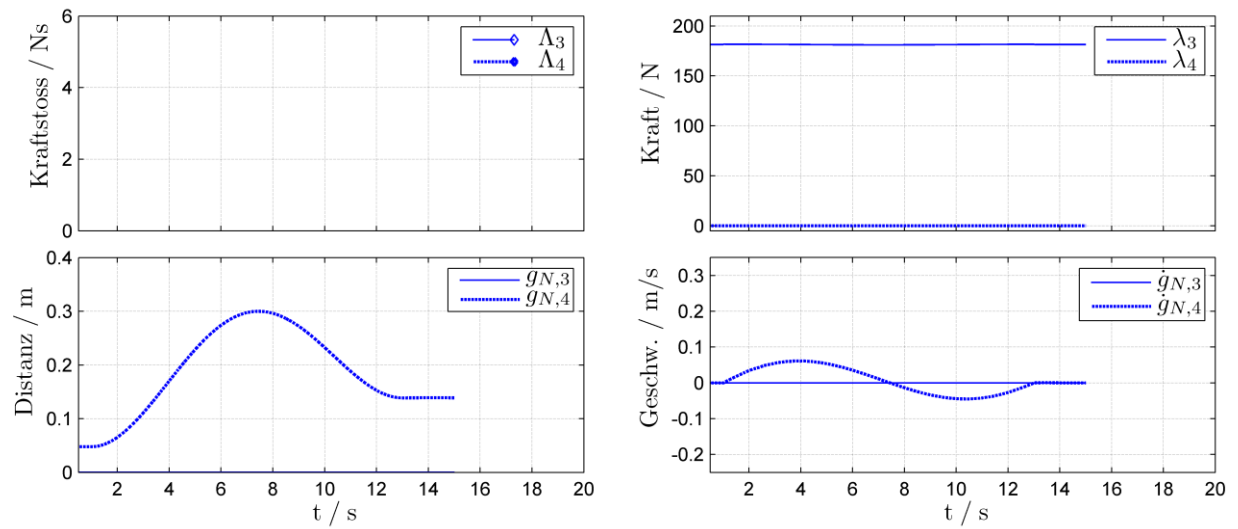


Abb. D.5: Regelung im Zustand S_1 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = \rho_{s,m} = -110.6^\circ \rightarrow 85.9^\circ$, Dauer 12 s. Zusätzliche Simulationsgrößen.

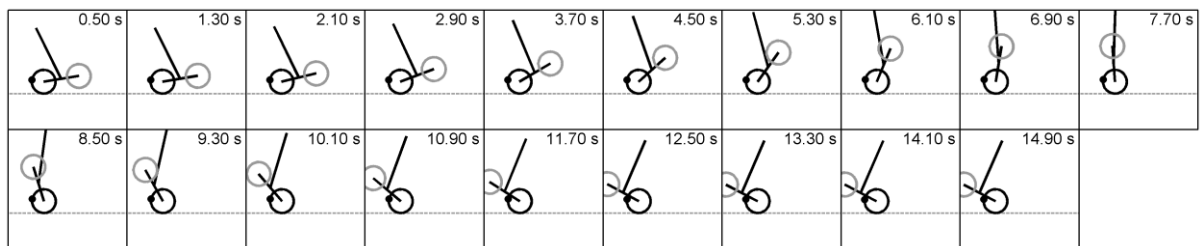


Abb. D.6: Regelung im Zustand S_1 . Sollwertvorgabe: $\rho_s = \rho_{s,m} = -110.6^\circ \rightarrow 85.9^\circ$, Dauer 12 s. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

D.3 Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, ebener Boden

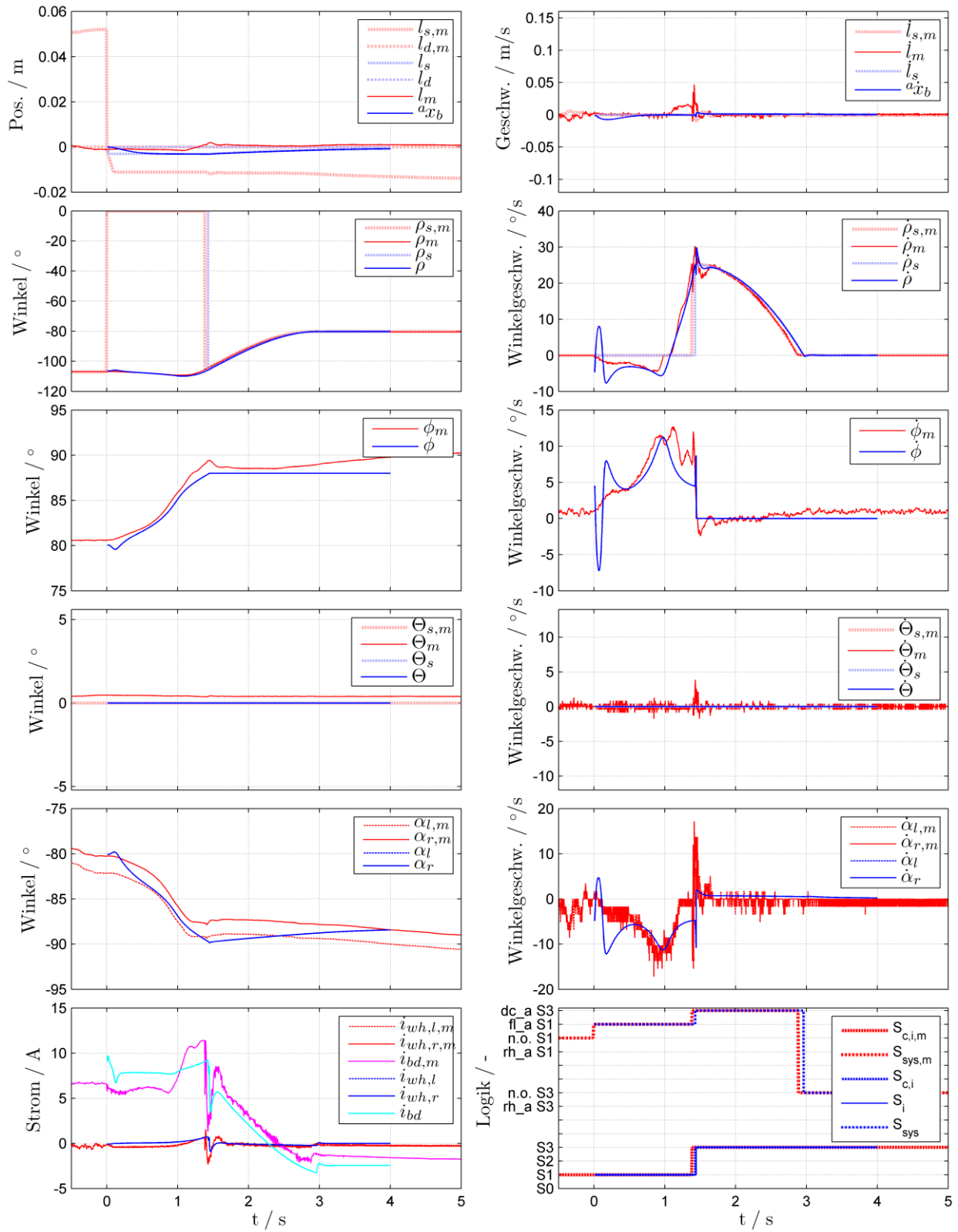
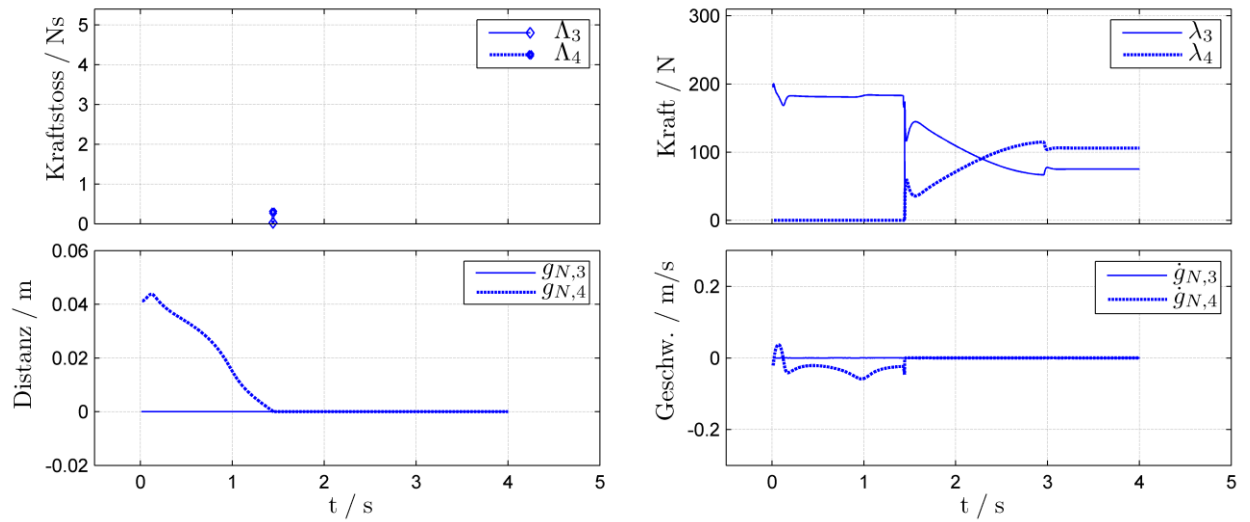
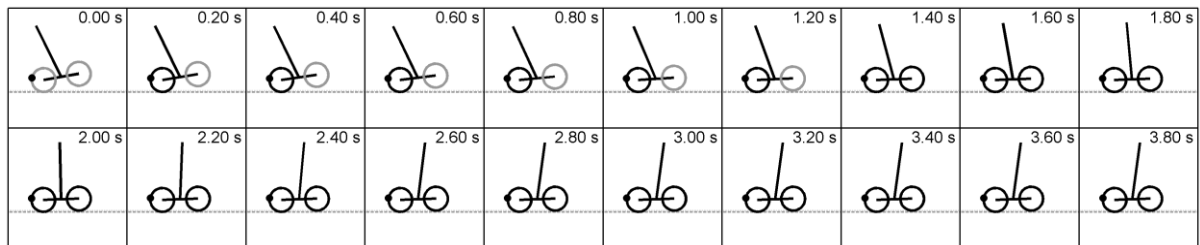


Abb. D.7: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 88^\circ$. Vergleich Simulation vs. Messung.

Abb. D.8: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 88^\circ$. Zusätzliche Simulationsgrößen.Abb. D.9: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 88^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

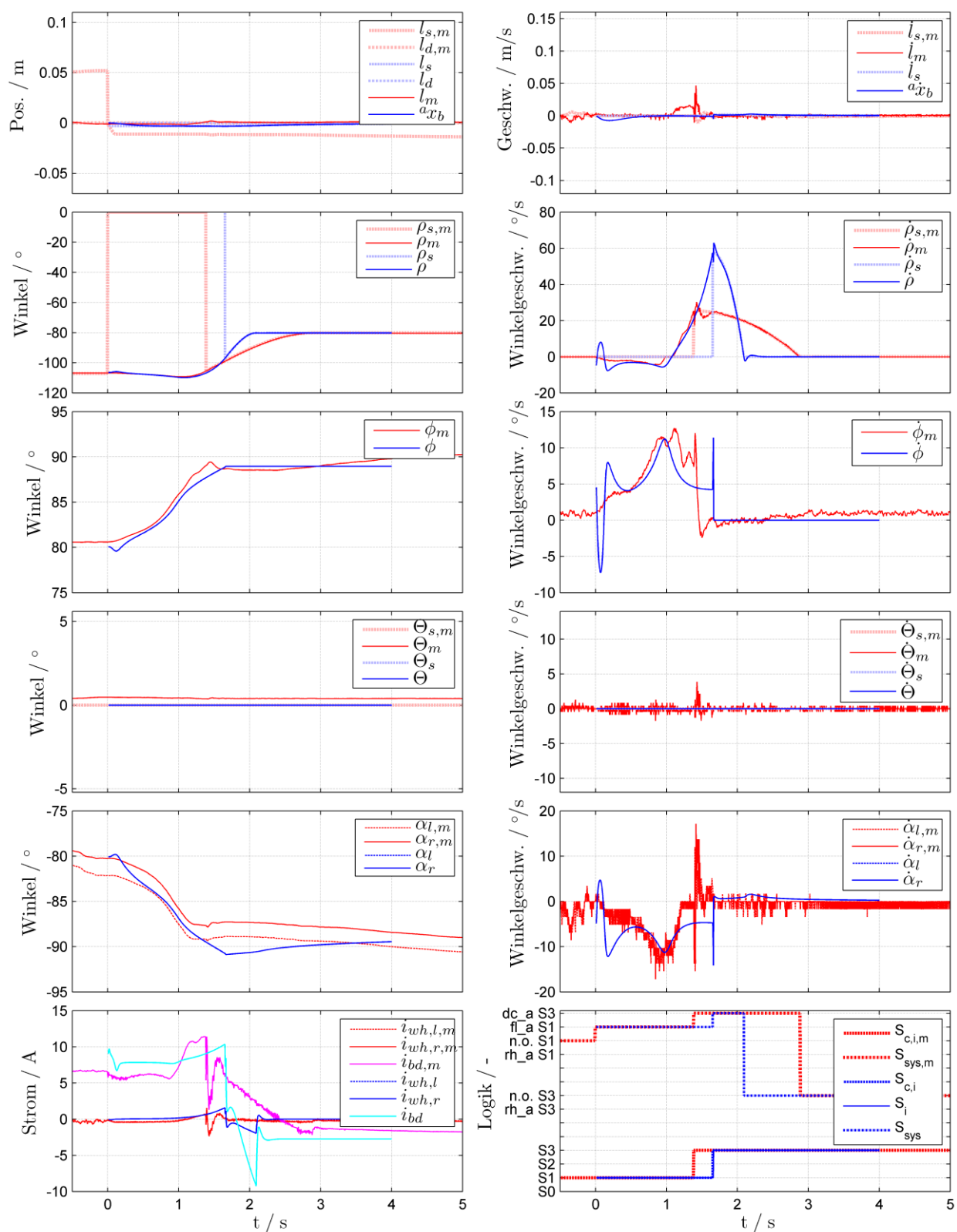
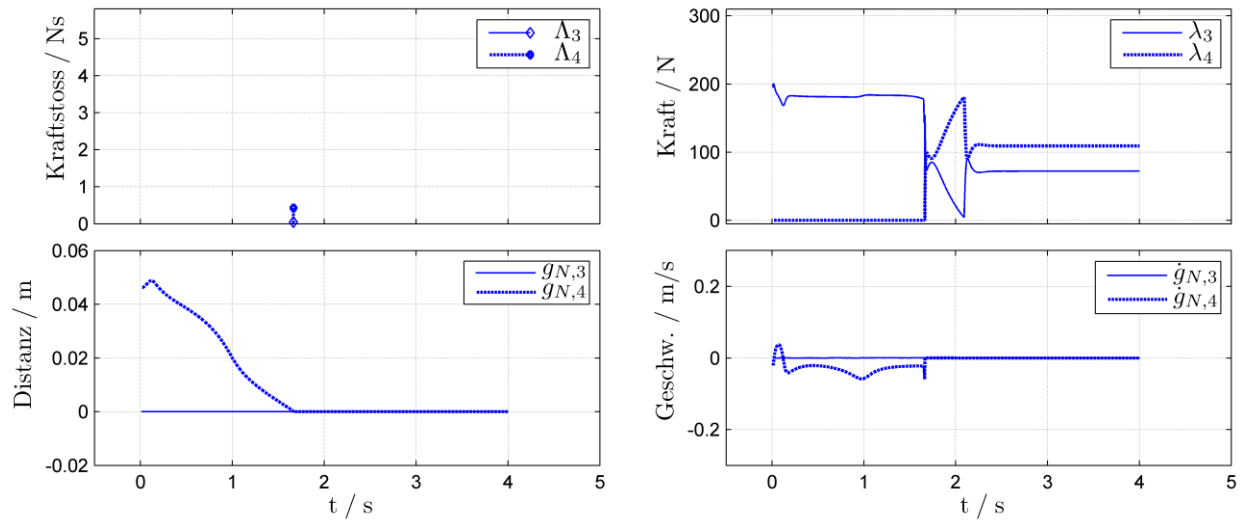
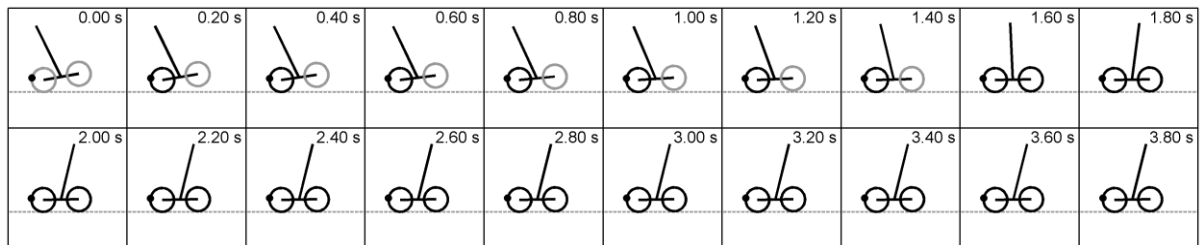


Abb. D.10: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 89^\circ$. Vergleich Simulation vs. Messung.

Abb. D.11: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 89^\circ$. Zusätzliche Simulationsgrößen.Abb. D.12: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$. Bodenlinie: $\phi = 89^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

D.4 Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, ebener Boden

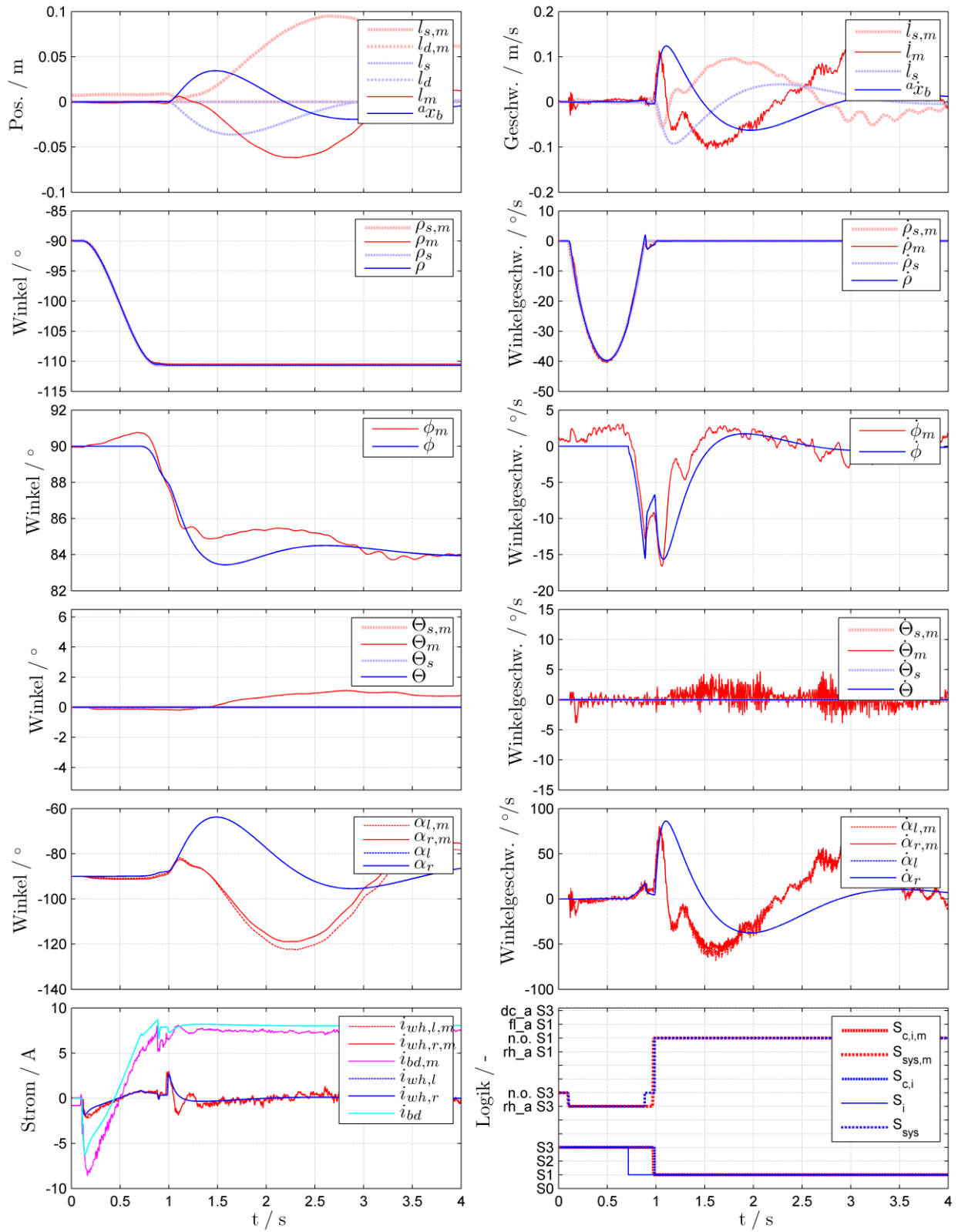


Abb. D.13: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Umschaltenschwellwert: $\phi = 88^\circ$. Vergleich Simulation vs. Messung.

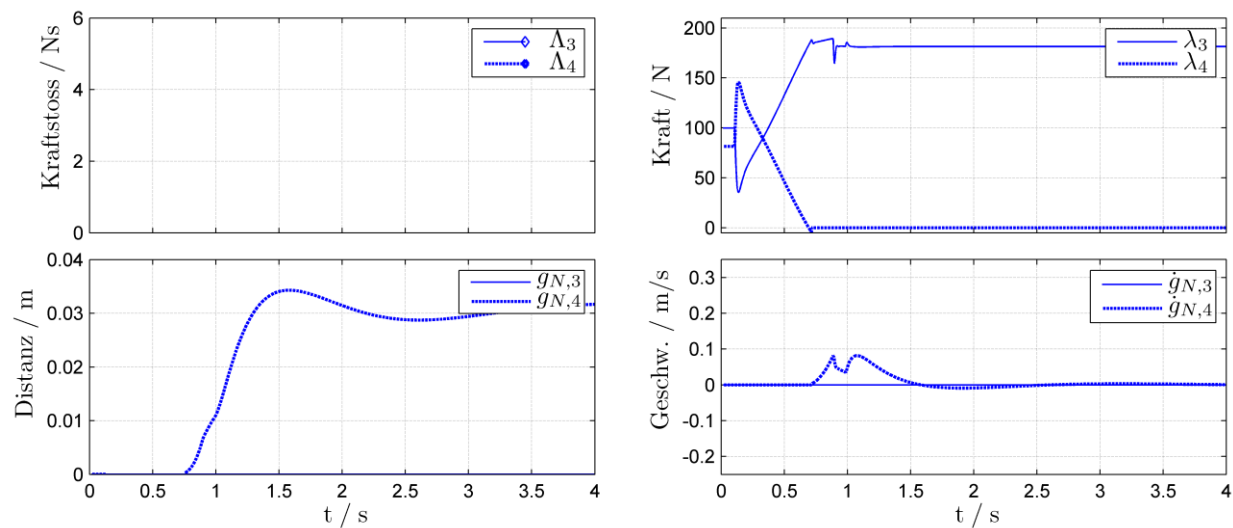


Abb. D.14: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Umschaltswellwert: $\phi = 88^\circ$. Zusätzliche Simulationsgrößen.

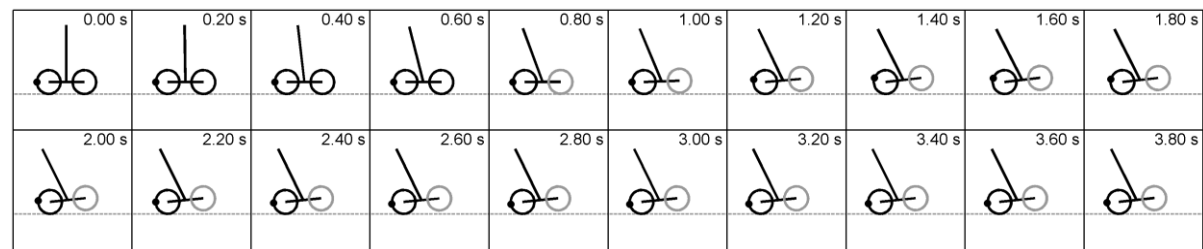


Abb. D.15: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$. Vergleich Simulation vs. Messung.

D.5 Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe

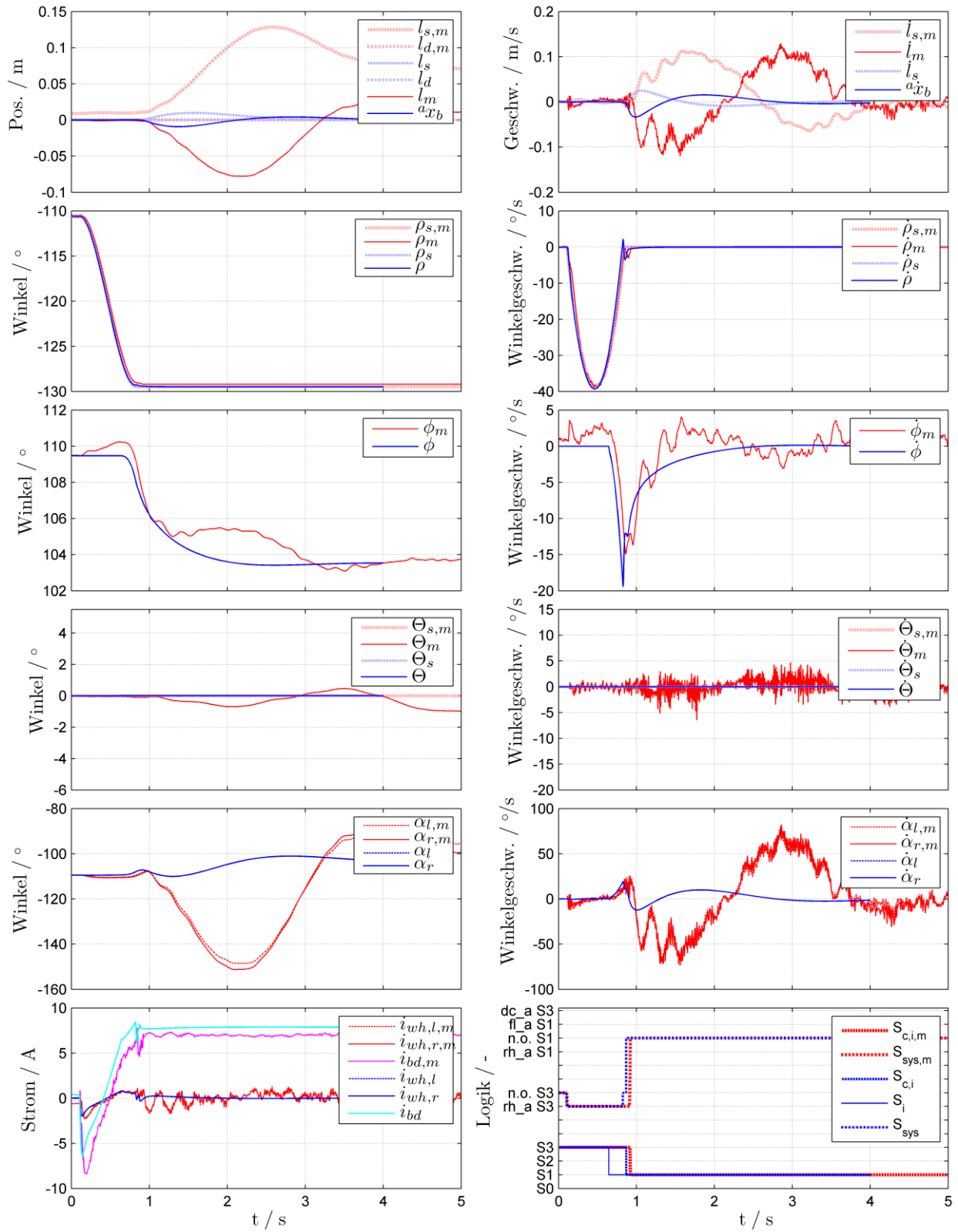


Abb. D.16: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe. Umschaltenschwellwert: $\phi = 107.5^\circ$. Vergleich Simulation vs. Messung.

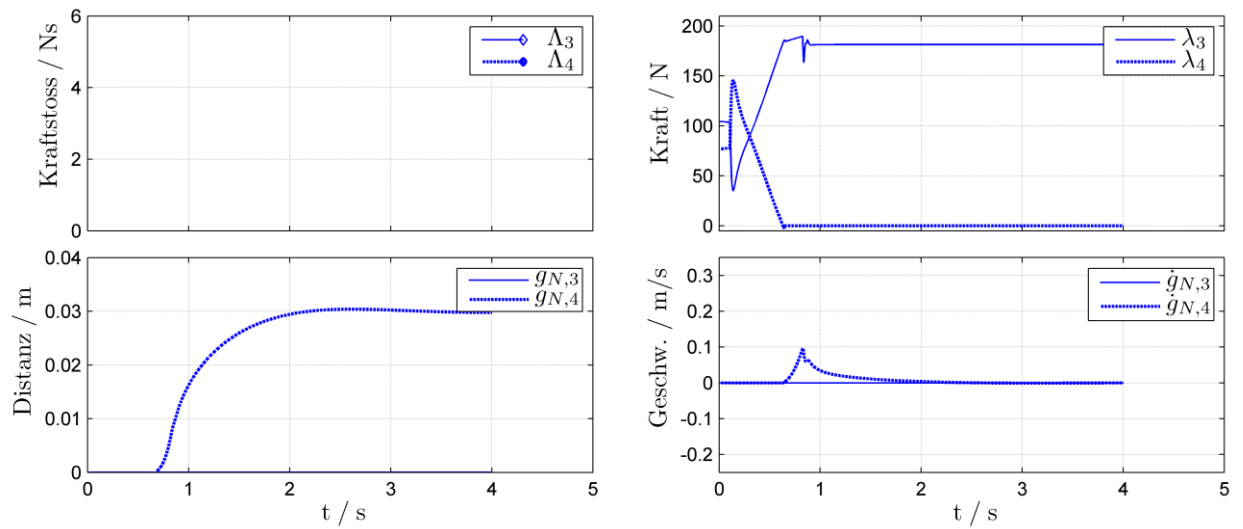


Abb. D.17: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe. Umschaltsschwellwert: $\phi = 107.5^\circ$. Zusätzliche Simulationsgrößen.

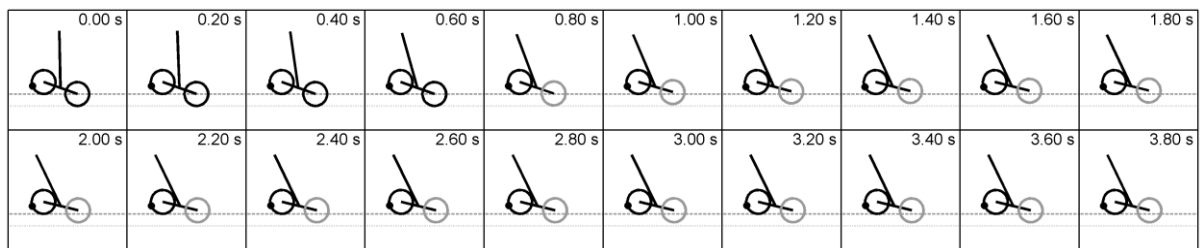


Abb. D.18: Zustandsübergang $S_3 \rightarrow S_1$, Treppe. Umschaltsschwellwert: $\phi = 107.5^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

D.6 Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe

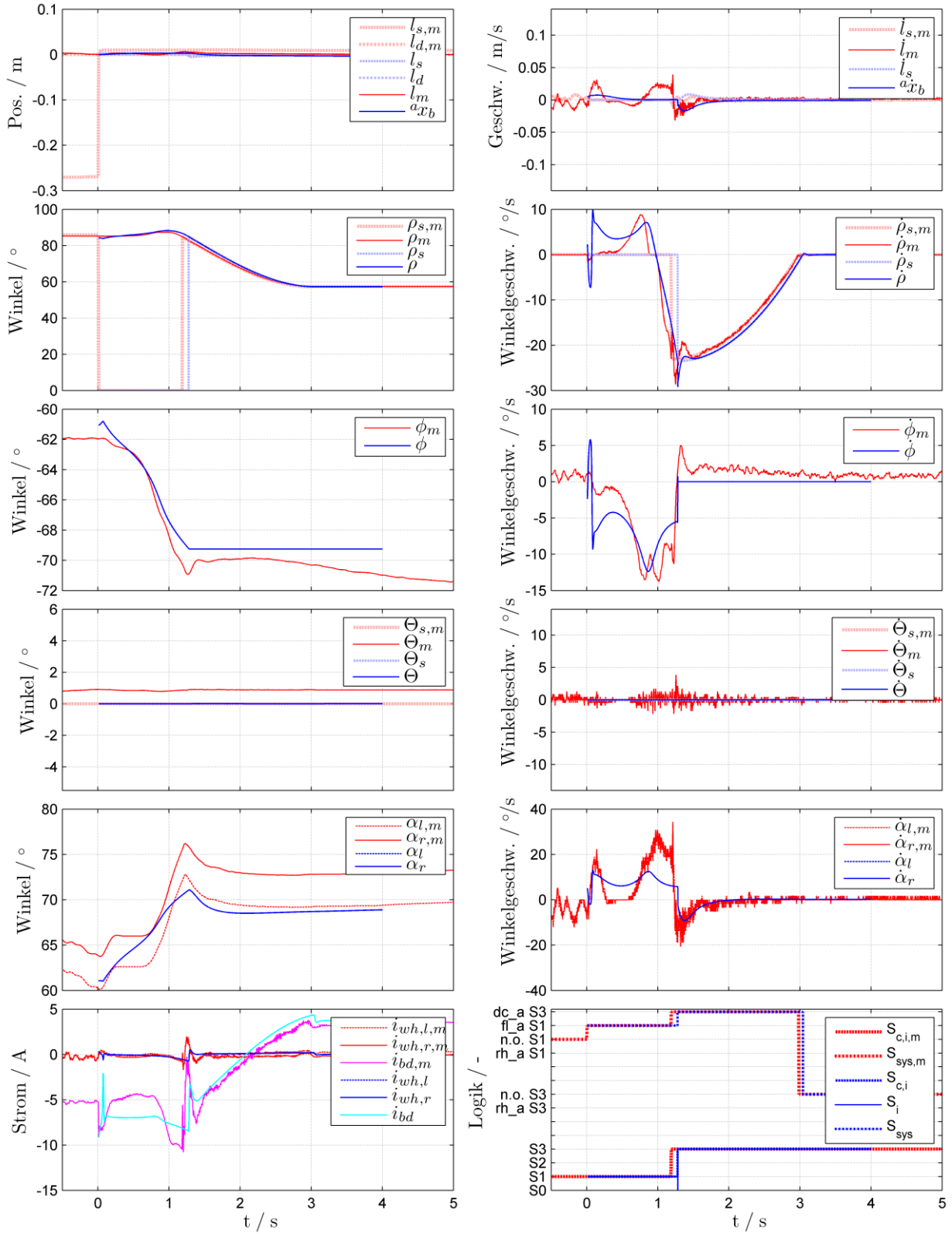
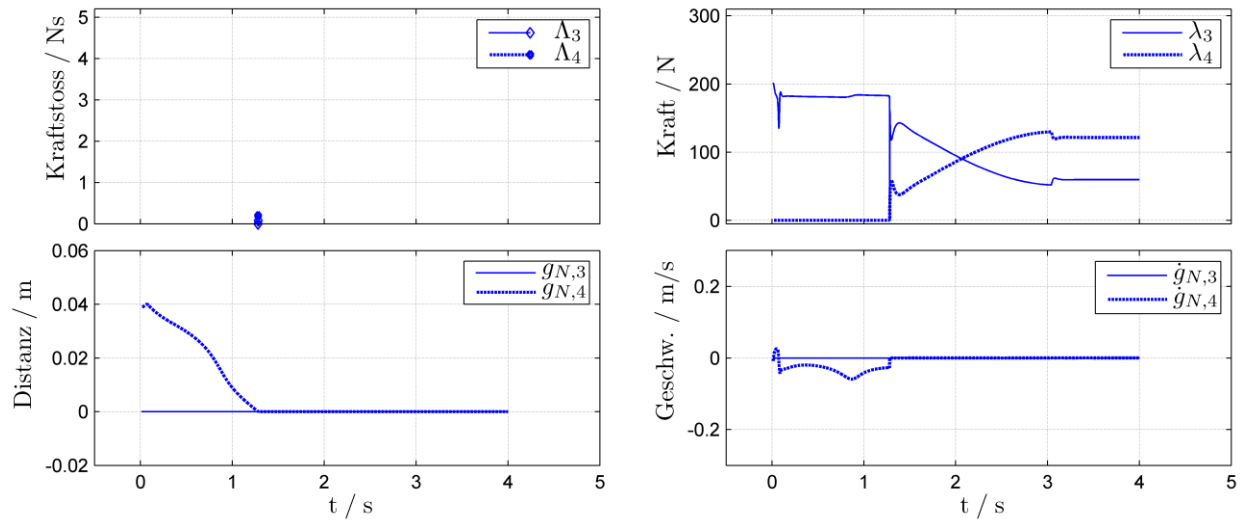
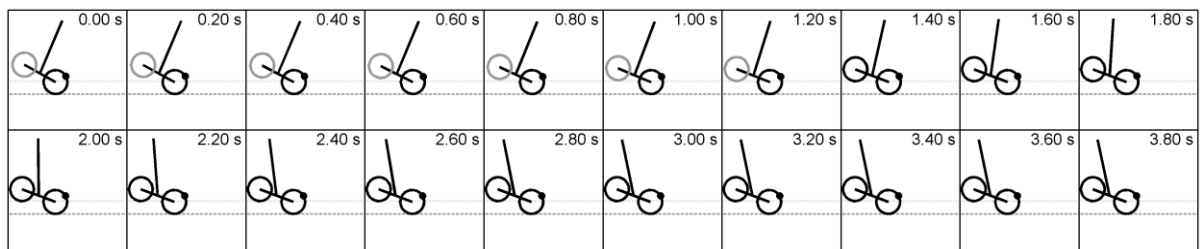


Abb. D.19: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -69.3^\circ$. Vergleich Simulation vs. Messung.

Abb. D.20: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -69.3^\circ$. Zusätzliche Simulationsgrößen.Abb. D.21: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -69.3^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

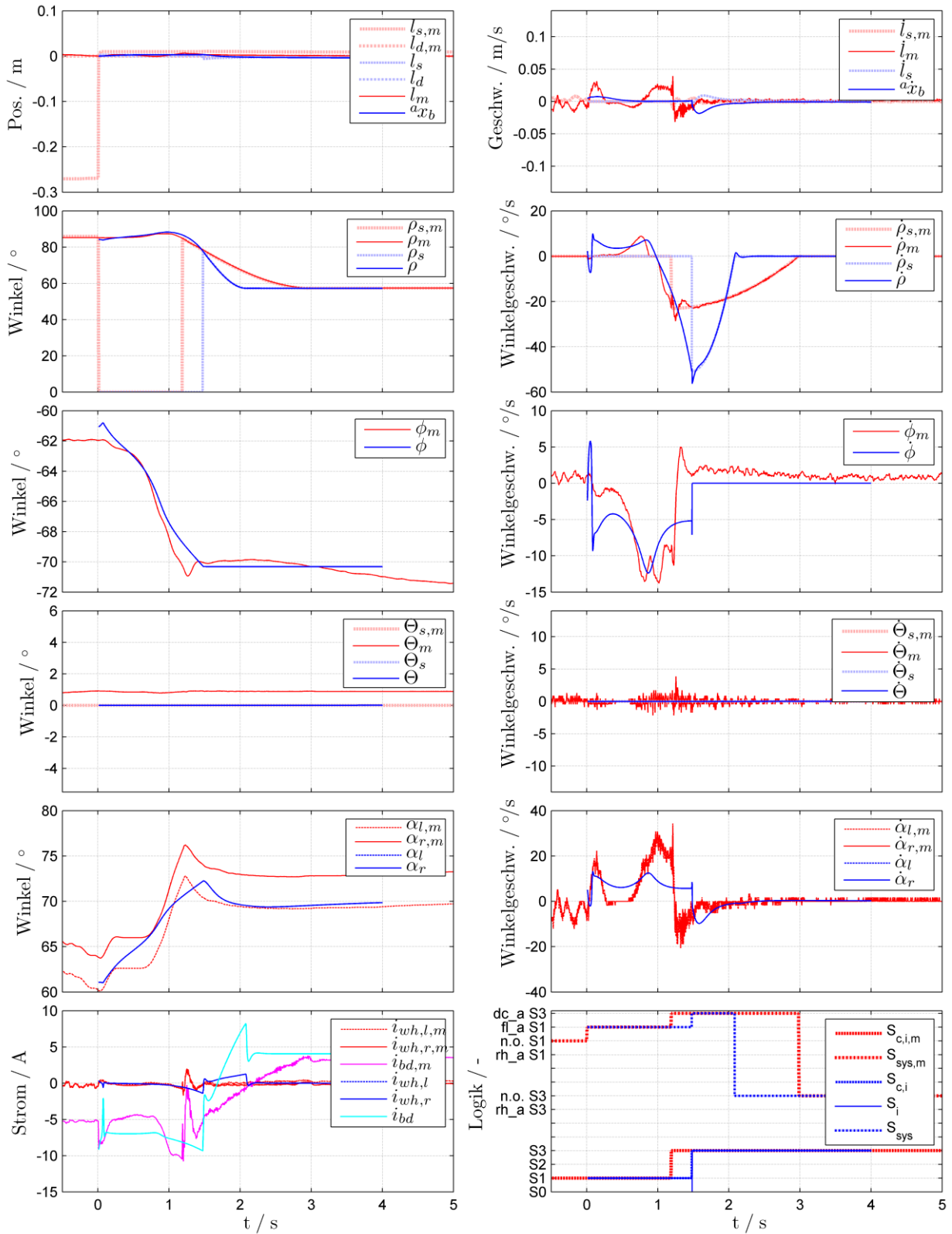


Abb. D.22: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -70.3^\circ$. Vergleich Simulation vs. Messung.

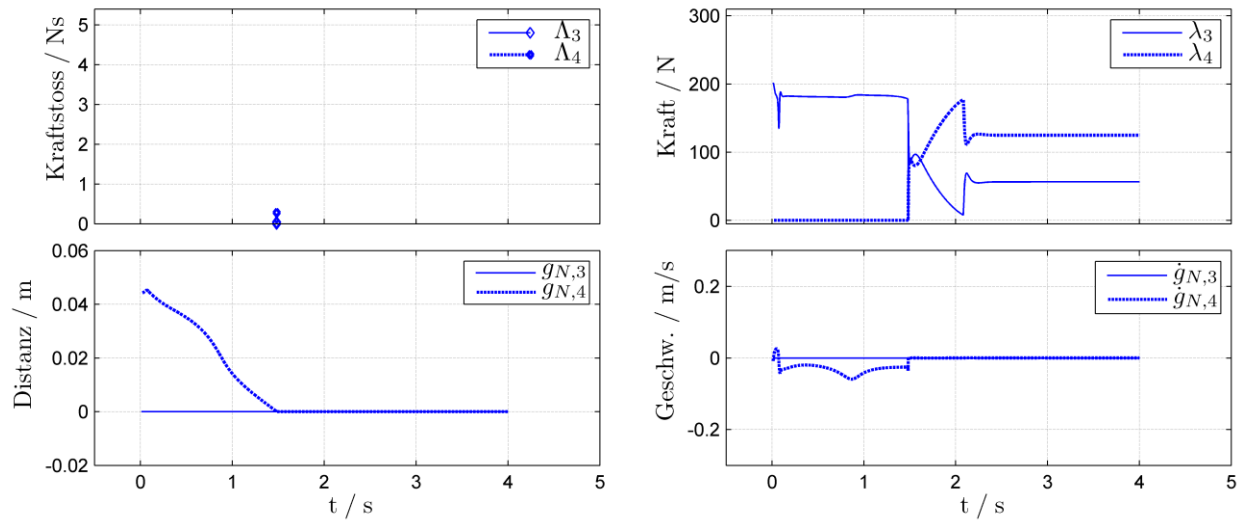


Abb. D.23: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -70.3^\circ$. Zusätzliche Simulationsgrößen.

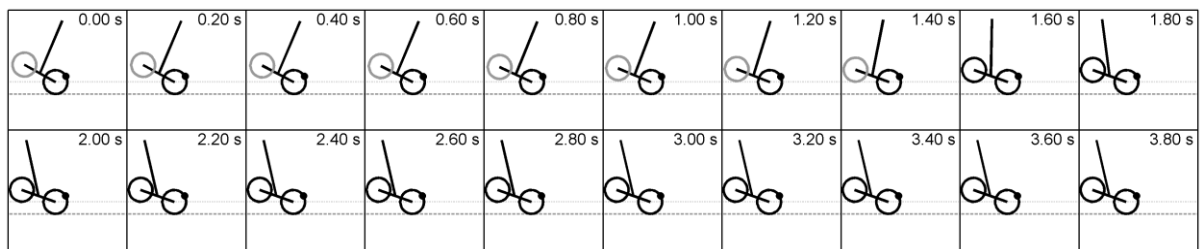


Abb. D.24: Zustandsübergang $S_1 \rightarrow S_3$, Treppe. Bodenlinie: $\phi = -70.3^\circ$. SCD-Umriss Diagramm (Simulation).

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Bruno Strah
Geburtsdatum: 03. Juni 1970
Geburtsort: Čakovec, Kroatien

Ausbildung

1976 – 1980 2. Grundschule in Čakovec
1980 – 1984 3. Grundschule in Čakovec

1984 – 1988 Schule für Elektrotechnik und Maschinenbau in Varaždin

1988 – 1989 Wehrdienst

1989 – 1995 Diplomstudium an der *University of Maribor*,
Faculty of Electrical Engineering and Computer Science
Thema der Diplomarbeit:
Modellbildung und Regelung eines inversen Pendels

1996 – 2000 Masterstudium an der *University of Zagreb*,
Faculty of Electrical Engineering and Computing
Thema der Masterarbeit:
Regelung von Wasserturbinen mit Adaptation auf Fehler im Positionierungssystem des Leitapparates

Berufliche Tätigkeit

2006 – 2012 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der
Technischen Universität Darmstadt
Institut für Mechatronische Systeme im Maschinenbau

2003 – 2006 Entwicklungsingenieur bei Continental AG, Lindau
Funktionsentwicklung, Produktlinie Fahrerassistenzsysteme

2000 – 2002 Entwicklungsingenieur bei AVL List GmbH, Graz
Motor Management Systeme, Antriebssysteme PKW

1996 – 2000 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am *Brodarski Institute*, Zagreb
Control Engineering Dept.